Ankündigung.

Erschienen sind bis jetzt aus dem Gebiete der

Mathematik:

Nr. 5. **C. F. Gauss,** Flächentheorie. (1827.) Deutsch herausg. v. A. Wangerin. (62 S.) ℳ —.80.

» 14. **C. F. Gauss,** Die 4 Beweise der Zerlegung ganzer algebr. Functionen etc. (1799—1849.) Herausg. v. E. Netto. Mit 1 Taf. (81 S.) ℳ 1.50.

» 17. **A. Bravais,** Abhandlungen über symmetr. Polyeder. (1849.) Übers. und in Gemeinschaft mit P. Groth herausg. von C. u. E. Blasius. Mit 1 Taf. (50 S.) ℳ 1.—.

» 19. Üb. d. Anziehung homogener Ellipsoide. Abhandlungen von **Laplace** (1782), **Ivory** (1809), **Gauss** (1813), **Chasles** (1838) und **Dirichlet** (1839). Herausg. von A. Wangerin. (118 S.) ℳ 2.—.

» 46. Abhandlungen über Variations-Rechnung. I. Theil: Abhandlungen von **Joh. Bernoulli** (1696), **Jac. Bernoulli** (1697) und **Leonhard Euler** (1744). Herausgegeben von P. Stäckel. Mit 19 Textfiguren. (144 S.) ℳ 2.—.

» 47. —— —— II. Theil: Abhandlungen von **Lagrange** (1762, 1770), **Legendre** (1786) und **Jacobi** (1837). Herausgegeben von P. Stäckel. Mit 12 Textfiguren. (110 S.) ℳ 1.60.

» 60. **Jacob Steiner,** Die geometr. Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten und zur praktischen Benutzung. (1833.) Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 25 Textfiguren. (85 S.) ℳ 1.20.

» 64. **C. G. J. Jacobi,** Über die vierfach periodischen Functionen zweier Variabeln, auf die sich die Theorie der Abel'schen Transcendenten stützt. (1834.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (40 S.) ℳ —.70.

» 65. **Georg Rosenhain,** Abhandlung über die Functionen zweier Variabler mit vier Perioden, welche die Inversen sind der ultraelliptischen Integrale erster Klasse. (1851.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Französischen übersetzt von A. Witting. (94 S.) ℳ 1.50.

» 67. **A. Göpel,** Entwurf einer Theorie der Abel'schen Transcendenten erster Ordnung. (1847.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (60 S.) ℳ 1.—.

» 71. **N. H. Abel,** Untersuchungen über die Reihe:

$$1 + \frac{m}{1} x + \frac{(m \cdot m - 1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \cdots\cdots$$

(1826.) Herausgegeben von A. Wangerin. (46 S.) ℳ 1.—.

» 73. **Leonhard Euler,** Zwei Abhandlungen über sphärische Trigonometrie. Grundzüge der sphärischen Trigonometrie und allgemeine sphärische Trigonometrie. (1753 u. 1779.) Aus dem Französischen und Lateinischen übersetzt und herausgegeben von E. Hammer. Mit 6 Figuren im Text. (65 S.) ℳ 1.—.

» 77. **C. G. J. Jacobi,** Über die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten. (De formatione et proprietatibus Determinantium.) (1841.) Herausgegeben von P. Stäckel. (73 S.) ℳ 1.20.

Nr. 78. **J. C. G. Jacobi,** Über die Functionaldeterminanten. (De determinantibus functionalibus.) (1841.) Herausgegeben von P. Stäckel. (72 S.) ℳ 1.20.

» 82. **Jacob Steiner,** Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität etc. (1832.) I. Theil. Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 14 Fig. im Text. (126 S.) ℳ 2.—.

» 83. —— —— II. Theil. Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 2 Figuren im Text. (162 S.) ℳ 2.40.

» 90. **A. Bravais,** Abhandlung über die Systeme von regelmässig auf einer Ebene oder im Raum vertheilten Punkten. (1848.) Übers. u. herausgegeben von C. u. E. Blasius. Mit 2 Tafeln. (142 S.) ℳ 2.—.

» 91. **G. Lejeune Dirichlet,** Untersuchungen über verschiedene Anwendungen der Infinitesimalanalysis auf die Zahlentheorie. (1839 bis 1840.) Deutsch herausgegeben von R. Haussner. (128 S.) ℳ 2.—.

» 93. **Leonhard Euler,** Drei Abhandlungen über Kartenprojection. (1777). Mit 9 Textfig. Herausg. von A. Wangerin. (78 S.) ℳ. 1.20.

» 103. **Joseph Louis Lagrange's** Zusätze zu Euler's Elementen der Algebra. Unbestimmte Analysis. Aus dem Französischen übersetzt von A. J. von Oettingen, herausg. von H. Weber. (171 S.) ℳ 2.60.

» 107. **Jakob Bernoulli,** Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi). (1713.) I. u. II. Theil. Übersetzt und herausgegeben von R. Haussner. Mit 1 Figur im Text. (162 S.) ℳ 2.50.

» 108. —— —— III. u. IV. Theil mit dem Anhange: Brief an einen Freund über das Ballspiel (Jeu de Paume). Übersetzt und herausgegeben von R. Haussner. Mit 3 Fig. (172 S.) ℳ 2.70.

» 111. **N. A. Abel,** Abhandlung über eine besondere Klasse algebraisch auflösbarer Gleichungen. Herausgegeben von Alfred Loewy. (50 S.) ℳ —.90.

Abhandlung

über eine

BESONDERE KLASSE ALGEBRAISCH AUFLÖSBARER GLEICHUNGEN.

Von
Niels Henrik
N. H. ABEL.

(1829.)

Herausgegeben

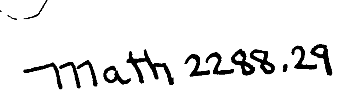
von

Alfred Loewy.

LEIPZIG

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1900.



[131]

Abhandlung über eine besondere Klasse algebraisch auflösbarer Gleichungen.

Von

N. H. Abel.

(Aus dem vierten Bande des Journals für die reine und angewandte Mathematik von *A. L. Crelle.* 1829).

Obgleich die algebraische Auflösung der Gleichungen im allgemeinen nicht möglich ist, so giebt es wenigstens besondere Gleichungen jeden Grades, welche eine derartige Auflösung zulassen.[1]) Dies sind zum Beispiel die Gleichungen der Form $x^n - 1 = 0$. Die Auflösung dieser Gleichungen beruht auf gewissen Relationen, die zwischen den Wurzeln bestehen. Ich versuchte diese Methode zu verallgemeinern, indem ich voraussetzte, dass zwei Wurzeln einer gegebenen Gleichung derartig unter einander verbunden seien, dass man die eine rational durch die andere ausdrücken kann; eine derartige Gleichung kann, wie ich fand, stets durch eine gewisse Anzahl von Gleichungen niedrigeren Grades gelöst werden. Es giebt auch Fälle, wo man die gegebene Gleichung selbst algebraisch lösen kann. Dies tritt zum Beispiel stets ein, wenn die gegebene Gleichung irreductibel und ihr Grad eine Primzahl ist. Dasselbe findet noch statt, wenn alle Wurzeln einer Gleichung durch:

$$x, \ \Theta x, \ \Theta^2 x, \ \Theta^3 x, \ \ldots \Theta^{n-1} x, \quad \text{wo } \Theta^n x = x \text{ ist,}$$

ausgedrückt werden können; Θx soll dabei eine rationale Function von x sein und $\Theta^2 x$, $\Theta^3 x, \ldots$ sollen Functionen derselben Form wie Θx zwei, drei u. s. w. mal genommen bedeuten.

Die Gleichung $\frac{x^n - 1}{x - 1} = 0$ gehört, wenn n eine Primzahl ist, zu dieser Gattung; denn bezeichnet man mit α eine primitive Wurzel für den Modul n,[2]) so kann man bekanntlich die $n - 1$ Wurzeln durch:

$$x,\ x^{\alpha},\ x^{\alpha^2},\ x^{\alpha^3},\ \ldots\ x^{\alpha^{n-2}},\ \text{wo}\ x^{\alpha^{n-1}} = x,$$

d. h. wenn man $x^{\alpha} = \Theta x$ setzt, durch:

$$x,\ \Theta x,\ \Theta^2 x,\ \Theta^3 x,\ \ldots\ \Theta^{n-2} x,\ \text{wo}\ \Theta^{n-1} x = x,$$

darstellen.

Dieselbe Eigenschaft kommt einer gewissen Klasse von Gleichungen zu, welche die Theorie der elliptischen Functionen liefert.[3])

Allgemein gelang es mir, das folgende Theorem zu beweisen:

Wenn die Wurzeln einer Gleichung irgend welchen Grades unter einander derartig verbunden sind, dass alle Wurzeln rational durch eine von ihnen ausgedrückt werden können, welche wir mit x bezeichnen, und wenn man ferner, [132] falls man durch Θx und $\Theta_1 x$ irgend zwei beliebige Wurzeln bezeichnet,

$$\Theta \Theta_1 x = \Theta_1 \Theta x$$

hat, so ist die Gleichung, um die es sich handelt, immer algebraisch auflösbar. Setzt man die Gleichung als irreductibel voraus und ist ihr Grad:

$$\alpha_1^{\nu_1} \cdot \alpha_2^{\nu_2} \cdots \alpha_{\omega}^{\nu_{\omega}},$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{\omega}$ verschiedene Primzahlen sind, so kann man die Auflösung dieser Gleichung reduciren auf die von ν_1 Gleichungen vom Grade α_1, von ν_2 Gleichungen vom Grade α_2, von ν_3 Gleichungen vom Grade α_3 u. s. w.

Nachdem ich diese Theorie allgemein dargestellt habe, werde ich sie auf die Kreisfunctionen und elliptischen Functionen[4]) anwenden.

§ 1

Wir betrachten zuerst den Fall, bei welchem nach Voraussetzung zwei Wurzeln einer irreductiblen[5]) Gleichung*) derartig

---

*) Eine Gleichung $\varphi x = 0$, deren Coefficienten rationale Functionen einer gewissen Anzahl bekannter Grössen a, b, c sind, wird

unter einander verbunden seien, dass die eine rational durch die andere ausgedrückt werden kann.

Es sei:

$$(1) \qquad \varphi x = 0$$

eine Gleichung vom Grade μ und x' und x_1 zwei Wurzeln, welche unter einander durch die Gleichung:

$$(2) \qquad x' = \Theta x_1$$

verbunden sind; hierbei bedeute Θx eine rationale Function von x und von bekannten Grössen. Da die Grösse x' eine der Wurzeln der Gleichung ist, so hat man $\varphi(x') = 0$ und infolge von (2):

$$(3) \qquad \varphi(\Theta x_1) = 0.$$

Ich behaupte jetzt, dass diese Gleichung auch noch gültig bleibt, wenn man an Stelle von x_1 irgend eine andere Wurzel der vorgelegten Gleichung setzt. Man hat thatsächlich das folgende Theorem *):

[**133**] Theorem I. Wenn eine Wurzel einer irreductiblen Gleichung $\varphi x = 0$ einer anderen Gleichung $fx = 0$ genügt, wo fx eine rationale Function von x und von bekannten Grössen, welche nach Voraussetzung in φx enthalten sind,

---

irreductibel genannt, wenn es unmöglich ist, irgend eine ihrer Wurzeln durch eine Gleichung niedrigeren Grades, deren Coefficienten ebenfalls rationale Functionen von $a, b, c \dots$ sind, auszudrücken.

*) Dieses Theorem lässt sich, wie folgt, leicht beweisen: Wie auch immer die rationale Function fx beschaffen ist, so kann man immer $fx = \frac{M}{N}$, wobei M und N ganze Functionen von x ohne gemeinsamen Factor sind, setzen; eine ganze Function von x kann immer in die Form $P + Q \cdot \varphi x$ gebracht werden; P und Q sind dabei derartige ganze Functionen, dass der Grad von P kleiner als derjenige der Function φx ist. Setzt man daher $M = P + Q \cdot \varphi x$, so hat man $fx = \frac{P + Q \cdot \varphi x}{N}$. Dies vorausgeschickt, bedeute x_1 die Wurzel von $\varphi x = 0$, welche gleichzeitig $fx = 0$ genügt; x_1 wird daher gleichzeitig eine Wurzel der Gleichung $P = 0$. Wäre nun P für irgend einen Werth des x nicht Null, so giebt diese Gleichung x_1 als Wurzel einer Gleichung niedrigeren Grades als desjenigen von $\varphi x = 0$; dies ist im Widerspruch mit unserer Annahme; daher ist $P = 0$ und folglich $fx = \varphi x \cdot \frac{Q}{N}$; hieraus ersieht man, dass fx gleichzeitig mit φx Null wird. Q. E. D.

bezeichnet, so wird diese letztere Gleichung auch befriedigt, wenn man an Stelle von x irgend eine Wurzel der Gleichung $\varphi x = 0$ setzt.

Die linke Seite der Gleichung (3) ist eine rationale Function von x, daher hat man:

$$\varphi(\Theta x) = 0 , \quad \text{wenn} \quad \varphi x = 0 , \tag{4}$$

d. h. wenn x irgend eine Wurzel der Gleichung $\varphi x = 0$ ist, so ist es auch die Grösse Θx.

Da Θx_1 eine Wurzel der Gleichung $\varphi x = 0$ ist, so ist jetzt infolge des Voraufgegangenen auch $\Theta\Theta x_1$ eine Wurzel; ebenso sind $\Theta\Theta\Theta x_1$ und die weiteren Grössen, die man erhält, indem man die Operation, welche mit Θ bezeichnet ist, eine beliebige Anzahl mal wiederholt, Wurzeln. Es sei zur Abkürzung:

$$\Theta\Theta x_1 = \Theta^2 x_1 ; \quad \Theta\Theta^2 x_1 = \Theta^3 x_1 ; \quad \Theta\Theta^3 x_1 = \Theta^4 x_1 \text{ u. s. w.}$$

gesetzt, dann hat man die Reihe:

$$x_1 , \quad \Theta x_1 , \quad \Theta^2 x_1 , \quad \Theta^3 x_1 , \quad \Theta^4 x_1 , \ldots \tag{5}$$

und alle diese Grössen sind Wurzeln der Gleichung $\varphi x = 0$. Die Reihe (5) wird eine unendliche Anzahl von Gliedern haben, aber da die Gleichung $\varphi x = 0$ nur eine endliche Anzahl verschiedener Wurzeln hat, so müssen mehrere Grössen der Reihe (5) unter einander gleich sein.

Wir setzen daher z. B. voraus:

$$\Theta^m x_1 = \Theta^{m+n} x_1 ,$$

oder:

$$\Theta^n(\Theta^m x_1) - \Theta^m x_1 = 0 , \tag{6}$$

indem man beachtet, dass $\Theta^{n+m} x_1 = \Theta^n \Theta^m x_1$ ist.

Die linke Seite der Gleichung (6) ist eine rationale Function von $\Theta^m x_1$; nun ist diese Grösse eine Wurzel der Gleichung $\varphi x = 0$, daher kann man infolge des oben ausgesprochenen Theorems x_1 an die Stelle von $\Theta^m x_1$ setzen. **[134]** Dies ergiebt:

$$\Theta^n x_1 = x_1 , \tag{7}$$

hierbei kann man voraussetzen, dass n den kleinsten möglichen Werth bezeichnet, so dass die Grössen:

$$x_1 , \quad \Theta x_1 , \quad \Theta^2 x_1 , \ldots \Theta^{n-1} x_1 \tag{8}$$

alle unter einander verschieden seien.

Die Gleichung (7) ergiebt:

$$\Theta^k \Theta^n x_1 = \Theta^k x_1 , \quad \text{d. h.} \quad \Theta^{n+k} x_1 = \Theta^k x_1 .$$

Diese Formel zeigt, dass von dem Term $\Theta^{n-1} x_1$ aus die Glieder der Reihe (8) sich in derselben Aufeinanderfolge reproduciren. Die n Grössen (8) sind daher die einzigen der Reihe (5), die unter einander verschieden sind.

Dies vorausgeschickt, sei, wenn $\mu > n$ ist, x_2 eine andere Wurzel der vorgelegten Gleichung, welche nicht in der Reihe (8) enthalten sei, dann folgt aus dem Theorem I, dass alle Grössen:

$$(9) \qquad x_2 , \quad \Theta x_2 , \quad \Theta^2 x_2 , \ldots \Theta^{n-1} x_2 , \ldots$$

gleichfalls Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind. Ich behaupte nun, dass diese Reihe auch nur n unter einander und von den Grössen in (8) verschiedene Grössen enthält. In der That, da $\Theta^n x_1 - x_1 = 0$ ist, so hat man infolge des Theorems I: $\Theta^n x_2 - x_2 = 0$ und folglich:

$$\Theta^{n+k} x_2 = \Theta^k x_2 .$$

Daher sind die einzigen Grössen der Reihe (9), welche unter einander verschieden sein können, die n ersten:

$$(10) \qquad x_2 , \quad \Theta x_2 , \quad \Theta^2 x_2 , \ldots \Theta^{n-1} x_2 .$$

Diese sind nothwendiger Weise unter einander und von den Grössen (8) verschieden. Wäre nämlich etwa:

$$\Theta^m x_2 = \Theta^\nu x_2 ,$$

wo m und ν kleiner als n sind, so würde folgen: $\Theta^m x_1 = \Theta^\nu x_1$; dies ist aber unmöglich, denn alle Grössen (8) sind unter einander verschieden. Hätte man hingegen:

$$\Theta^m x_2 = \Theta^\nu x_1 ,$$

so würde folgen:

$$\Theta^{n-m} \Theta^\nu x_1 = \Theta^{n-m} \Theta^m x_2 = \Theta^{n-m+m} x_2 = \Theta^n x_2 = x_2 ,$$

daher:

$$x_2 = \Theta^{n-m+\nu} x_1 ,$$

das heisst die Wurzel x_2 wäre in der Reihe (8) enthalten, was gegen die Voraussetzung ist.

[135] Die Anzahl der Wurzeln, welche in (8) und (10) enthalten sind, ist gleich $2n$; daher ist μ entweder gleich $2n$ oder grösser als diese Zahl.

In dem letzteren Falle sei x_3 eine Wurzel, welche von den in (8) und (10) enthaltenen Wurzeln verschieden sei, dann hat man eine neue Reihe von Wurzeln:

$$x_3\,,\quad \Theta x_3\,,\quad \Theta^2 x_3\,,\;\ldots\;\Theta^{n-1} x_3\,,\;\ldots$$

Man beweist genau auf dieselbe Art, dass die n ersten dieser Wurzeln unter einander und von den Wurzeln (8) und (10) verschieden sind.

Indem man diesen Process fortsetzt, bis alle Wurzeln der Gleichung $\varphi x = 0$ erschöpft sind, sieht man, dass die μ Wurzeln dieser Gleichung sich in mehrere Gruppen theilen, die aus n Termen bestehen; daher ist μ durch n theilbar; bezeichnet man mit m die Zahl der Gruppen, so hat man:

$$\mu = m \cdot n. \tag{11}$$

Die Wurzeln selbst sind:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1\,,\quad \Theta x_1\,,\quad \Theta^2 x_1\,,\;\ldots\;\Theta^{n-1} x_1\,,\\ x_2\,,\quad \Theta x_2\,,\quad \Theta^2 x_2\,,\;\ldots\;\Theta^{n-1} x_2\,,\\ x_3\,,\quad \Theta x_3\,,\quad \Theta^2 x_3\,,\;\ldots\;\Theta^{n-1} x_3\,,\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ x_m\,,\quad \Theta x_m\,,\quad \Theta^2 x_m\,,\;\ldots\;\Theta^{n-1} x_m\,. \end{array}\right. \tag{12}$$

Wenn $m = 1$ ist, so hat man $\mu = n$ und die μ Wurzeln der Gleichung $\varphi x = 0$ sind durch:

$$x_1\,,\quad \Theta x_1\,,\quad \Theta^2 x_1\,,\;\ldots\;\Theta^{\mu-1} x_1 \tag{13}$$

ausgedrückt. In diesem Falle ist, wie man weiter sehen wird, die Gleichung $\varphi x = 0$ algebraisch auflösbar. Aber diese Eigenschaft findet nicht immer statt, wenn m grösser als die Einheit ist. Man kann dann nur die Auflösung der Gleichung $\varphi x = 0$ auf diejenige einer Gleichung n-ten Grades reduciren, deren Coefficienten von einer Gleichung m-ten Grades abhängen; dies wollen wir im folgenden Paragraphen beweisen.

§ 2.

Betrachten wir irgend eine der Gruppen (12), z. B. die erste, und setzen wir:

$$\left\{\begin{array}{l} (x - x_1)(x - \Theta x_1)(x - \Theta^2 x_1)\ldots(x - \Theta^{n-1} x_1)\\ = x^n + A_1' x^{n-1} + A_1'' x^{n-2} + \cdots + A_1^{(n-1)} x + A_1^{(n)} = 0, \end{array}\right. \tag{14}$$

dann sind die Wurzeln dieser Gleichung:

$$x_1, \quad \Theta x_1, \quad \Theta^2 x_1, \quad \ldots \; \Theta^{n-1} x_1$$

und die Coefficienten A_1', A_1'', ... $A_1^{(n)}$ sind rationale und [136] symmetrische Functionen dieser Grössen. Wir werden sehen, dass man die Aufstellung dieser Coefficienten von der Auflösung einer einzigen Gleichung m-ten Grades abhängig machen kann.

Um dies nachzuweisen, betrachten wir irgend eine rationale und symmetrische Function von x_1, Θx_1, $\Theta^2 x_1$, ... $\Theta^{n-1} x_1$, sie sei:

$$(15) \qquad y_1 = f(x_1, \Theta x_1, \Theta^2 x_1, \ldots \Theta^{n-1} x_1).$$

Setzt man an die Stelle von x_1 der Reihe nach x_2, x_3, ... x_m, so nimmt die Function y_1 verschiedene Werthe an, welche wir mit $y_1, y_2, y_3, \ldots y_m$ bezeichnen. Beachtet man dies und bildet eine Gleichung m-ten Grades:

$$(16) \quad y^m + p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} + \cdots + p_{m-1} y + p_m = 0,$$

deren Wurzeln $y_1, y_2, y_3, \ldots y_m$ sind, so behaupte ich, dass die Coefficienten dieser Gleichung rational durch die bekannten Grössen, welche man durch die vorgelegte Gleichung als gegeben voraussetzt, ausgedrückt werden können.

Da die Grössen $\Theta x_1, \Theta^2 x_1, \ldots \Theta^{n-1} x_1$ rationale Functionen von x_1 sind, so ist es auch y_1. Es sei:

$$(17) \quad \begin{cases} y_1 = F x_1, \\ \text{dann haben wir auch:} \\ y_2 = F x_2; \quad y_3 = F x_3; \quad \ldots \; y_m = F x_m. \end{cases}$$

Setzt man in (15) der Reihe nach Θx_1, $\Theta^2 x_1$, $\Theta^3 x_1$, ... $\Theta^{n-1} x_1$ an Stelle von x_1 und beachtet, dass $\Theta^n x_1 = x_1$, $\Theta^{n+1} x_1 = \Theta x_1$, $\Theta^{n+2} x_1 = \Theta^2 x_1$, u. s. w. ist, so ist klar, dass die Function y_1 ihren Werth nicht ändert, daher hat man:

$$y_1 = F x_1 = F(\Theta x_1) = F(\Theta^2 x_1) = \cdots = F(\Theta^{n-1} x_1)$$

und ebenso:

$$y_2 = F x_2 = F(\Theta x_2) = F(\Theta^2 x_2) = \cdots = F(\Theta^{n-1} x_2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_m = F x_m = F(\Theta x_m) = F(\Theta^2 x_m) = \cdots = F(\Theta^{n-1} x_m).$$

Erhebt man jedes Glied dieser Gleichungen in die ν-te Potenz, so folgt:

$$y_1^\nu = \frac{1}{n}\{(Fx_1)^\nu + (F\Theta x_1)^\nu + \cdots + (F\Theta^{n-1}x_1)^\nu\},$$

$$y_2^\nu = \frac{1}{n}\{(Fx_2)^\nu + (F\Theta x_2)^\nu + \cdots + (F\Theta^{n-1}x_2)^\nu\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_m^\nu = \frac{1}{n}\{(Fx_m)^\nu + (F\Theta x_m)^\nu + \cdots + (F\Theta^{n-1}x_m)^\nu\}.$$

Addirt man die zuletzt hingeschriebenen Gleichungen, so hat man den Werth von:

$$y_1^\nu + y_2^\nu + y_3^\nu + \cdots + y_m^\nu$$

[137] als rationale und symmetrische Function aller Wurzeln der Gleichung $\varphi x = 0$ ausgedrückt, es ist nämlich:

$$(19) \qquad y_1^\nu + y_2^\nu + y_3^\nu + \cdots + y_m^\nu = \frac{1}{n}\Sigma(Fx)^\nu.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung kann rational durch die Coefficienten von φx und Θx, d. h. durch bekannte Grössen, ausgedrückt werden. Setzt man daher:

$$(20) \qquad r_\nu = y_1^\nu + y_2^\nu + y_3^\nu + \cdots + y_m^\nu,$$

so hat man den Werth von r_ν für irgend einen ganzzahligen Index ν. Kennt man aber $r_1, r_2, \ldots r_m$, so kann man den Werth jeder symmetrischen Function der Grössen $y_1, y_2, \ldots y_m$ finden. Man kann daher auf diese Art alle Coefficienten der Gleichung (16) finden und folglich jede rationale und symmetrische Function von $x_1, \Theta x_1, \Theta^2 x_1, \ldots \Theta^{n-1}x_1$ vermöge einer Gleichung m-ten Grades bestimmen. Auf diese Art gewinnt man die Coefficienten der Gleichung (14), deren Auflösung dann den Werth von x_1 u. s. w. ergiebt.

Man ersieht hieraus, dass man die Auflösung der Gleichung $\varphi x = 0$, welche vom Grade $\mu = m \cdot n$ ist, auf diejenige einer gewissen Anzahl Gleichungen vom Grade m und n zurückführen kann. Es genügt sogar, wie wir sehen werden, eine einzige Gleichung vom Grade m und m Gleichungen vom Grade n aufzulösen.

Es sei ψx_1 irgend einer der Coefficienten $A_1', A_1'', \ldots A_1^{(n)}$, wir setzen dann:

$$(21)\quad t_\nu = y_1^\nu \cdot \psi x_1 + y_2^\nu \cdot \psi x_2 + y_3^\nu \cdot \psi x_3 + \cdots y_m^\nu \cdot \psi x_m .$$

Da $y_1^\nu \cdot \psi x_1$ eine symmetrische Function der Grössen x_1, $\Theta x_1, \ldots \Theta^{n-1} x_1$ ist, so hat man, wenn man beachtet, dass $\Theta^n x_1 = x_1$, $\Theta^{n+1} x_1 = \Theta x_1$, u. s. w. ist:

$$y_1^\nu \cdot \psi x_1 =$$
$$(Fx_1)^\nu \cdot \psi x_1 = (F\Theta x_1)^\nu \cdot \psi \Theta x_1 = \cdots = (F\Theta^{n-1} x_1)^\nu \cdot \psi \Theta^{n-1} x_1 ,$$

daher:

$$y_1^\nu \cdot \psi x_1 =$$
$$\frac{1}{n}\{(Fx_1)^\nu \cdot \psi x_1 + (F\Theta x_1)^\nu \cdot \psi \Theta x_1 + \cdots + (F\Theta^{n-1} x_1)^\nu \cdot \psi \Theta^{n-1} x_1\}.$$

Für $y_2^\nu \cdot \psi x_2$, $y_3^\nu \cdot \psi x_3, \ldots y_m^\nu \cdot \psi x_m$ findet man ähnliche Ausdrücke, indem man $x_2, x_3, \ldots x_m$ an die Stelle von x_1 setzt. Führt man diese Werthe ein, so sieht man, dass t_ν eine rationale und symmetrische Function aller Wurzeln der Gleichung $\varphi x = 0$ ist. Man hat in der That:

$$(22)\qquad t_\nu = \frac{1}{n} \Sigma (Fx)^\nu \cdot \psi x .$$

Daher kann man t_ν rational durch bekannte Grössen ausdrücken.

Beachtet man dies und setzt $\nu = 0, 1, 2, 3 \ldots m-1$, so ergiebt die Formel (21):

$$[138]\qquad \begin{aligned} \psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_m &= t_0 , \\ y_1 \psi x_1 + y_2 \psi x_2 + \cdots + y_m \psi x_m &= t_1 , \\ y_1^2 \psi x_1 + y_2^2 \psi x_2 + \cdots + y_m^2 \psi x_m &= t_2 , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ y_1^{m-1} \psi x_1 + y_2^{m-1} \psi x_2 + \cdots + y_m^{m-1} \psi x_m &= t_{m-1} . \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen, die in Bezug auf $\psi x_1, \psi x_2, \ldots \psi x_m$ linear sind, findet man leicht die Werthe dieser Grössen als rationale Functionen von $y_1, y_2, y_3, \cdots y_m$.

Setzt man:

$$(23)\qquad (y-y_2)(y-y_3)\cdots(y-y_m)$$
$$=y^{m-1}+R_{m-2}y^{m-2}+R_{m-3}y^{m-3}+\cdots+R_1y+R_0\,,$$

so hat man:

$$(24)\quad \psi x_1=\frac{t_0R_0+t_1R_1+t_2R_2+\cdots+t_{m-2}R_{m-2}+t_{m-1}}{R_0+R_1y_1+R_2y_1^2+\cdots+R_{m-2}y_1^{m-2}+y_1^{m-1}}\,.$$

Die Grössen R_0, R_1, ... R_{m-2} sind rationale Functionen von y_2, y_3, y_4, ... y_m; aber man kann sie durch y_1 allein ausdrücken. Multiplicirt man nämlich (23) mit $y-y_1$, so hat man:

$$(y-y_1)(y-y_2)\cdots(y-y_m)$$
$$=y^m+p_1y^{m-1}+p_2y^{m-2}+\cdots+p_{m-1}y+p_m$$
$$=y^m+(R_{m-2}-y_1)y^{m-1}+(R_{m-3}-y_1R_{m-2})y^{m-2}+\cdots.$$

Vergleicht man die gleich hohen Potenzen von y, so schliesst man:

$$(25)\quad \begin{cases} R_{m-2}=y_1+p_1\,,\\ R_{m-3}=y_1R_{m-2}+p_2=y_1^2+p_1y_1+p_2\,,\\ R_{m-4}=y_1R_{m-3}+p_3=y_1^3+p_1y_1^2+p_2y_1+p_3\,,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ R_0=y_1^{m-1}+p_1y_1^{m-2}+p_2y_1^{m-3}+\cdots+p_{m-1}\,. \end{cases}$$

Setzt man diese Werthe ein, so wird der Ausdruck von ψx_1 eine rationale Function von y_1 und von bekannten Grössen. Man sieht, dass wenn der Nenner:

$$R_0+R_1y_1+R_2y_1^2+\cdots+R_{m-2}y_1^{m-2}+y_1^{m-1}$$

nicht Null wird, es stets möglich ist, ψx_1 auf diese Art zu finden. Man kann thatsächlich der Function y_1 eine unendliche Anzahl Formen geben, welche diese Gleichung unmöglich machen, z. B. indem man setzt:

$$(26)\quad y_1=(\alpha-x_1)(\alpha-\Theta x_1)(\alpha-\Theta^2x_1)\ldots(\alpha-\Theta^{n-1}x_1)\,,$$

wo α unbestimmt ist, dann kann der Nenner, um den es sich handelt, nicht verschwinden. Da dieser Nenner nämlich dasselbe wie:

$$(y_1 - y_2)(y_1 - y_3) \dots (y_1 - y_m)$$

ist, [139] so würde man, wenn er Null wäre,

$$y_1 = y_k$$

haben, das heisst:

$$(\alpha - x_1)(\alpha - \Theta x_1) \cdots (\alpha - \Theta^{n-1} x_1)$$
$$= (\alpha - x_k)(\alpha - \Theta x_k) \cdots (\alpha - \Theta^{n-1} x_k),$$

dies ist unmöglich, denn alle Wurzeln x_1, Θx_1, $\Theta^2 x_1$, ... $\Theta^{n-1} x_1$ sind von den Wurzeln x_k, Θx_k, $\Theta^2 x_k$, ... $\Theta^{n-1} x_k$ verschieden.

Die Coefficienten A_1', A_1'', ... $A_1^{(n)}$ können daher rational durch eine und dieselbe Function y_1, deren Werth von einer Gleichung m-ten Grades abhängt, ausgedrückt werden.

Die Wurzeln der Gleichung (14) sind:

$$x_1, \quad \Theta x_1, \quad \Theta^2 x_1, \dots \Theta^{n-1} x_1.$$

Ersetzt man in den Coefficienten A_1', A_1'', u. s. w. y_1 durch y_2, y_3, ... y_m, so erhält man $m - 1$ andere Gleichungen, deren Wurzeln beziehungsweise sind:

$$\begin{array}{llll} x_2, & \Theta x_2, & \dots & \Theta^{n-1} x_2, \\ x_3, & \Theta x_3, & \dots & \Theta^{n-1} x_3, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m, & \Theta x_m, & \dots & \Theta^{n-1} x_m. \end{array}$$

Theorem II. Die vorgelegte Gleichung $\varphi x = 0$ kann daher in m Gleichungen vom Grade n zerlegt werden; die Coefficienten dieser Gleichungen sind dabei rationale Functionen je einer Wurzel einer einzigen Gleichung m-ten Grades. [6])

Diese letztere Gleichung ist im allgemeinen nicht algebraisch auflösbar, wenn sie den vierten Grad übersteigt; aber die Gleichung (14) und die anderen ähnlichen sind es, wie wir im folgenden Paragraphen sehen werden, stets, wenn die Coefficienten A_1', A_1'' u. s. w. bekannt sind.

§ 3.

In dem voraufgegangenen Paragraphen haben wir den Fall, bei dem m grösser als die Einheit ist, betrachtet. Jetzt wollen wir uns mit dem Fall, bei dem $m = 1$ ist, beschäftigen.

In diesem Falle hat man $\mu = n$, und die Wurzeln der Gleichung $\varphi x = 0$ sind:

(27) $$x_1,\quad \Theta x_1,\quad \Theta^2 x_1,\quad \dots\ \Theta^{\mu-1} x_1;$$

ich behaupte nun, dass jede Gleichung, deren Wurzeln auf diese Art ausgedrückt werden können, algebraisch auflösbar ist.

[**140**] Sei α irgend eine Wurzel der Gleichung $\alpha^\mu - 1 = 0$ und setzen wir:

(28) $$\psi x = (x + \alpha\Theta x + \alpha^2\Theta^2 x + \alpha^3\Theta^3 x + \cdots + \alpha^{\mu-1}\Theta^{\mu-1}x)^\mu,$$ [7])

so ist ψx eine rationale Function von x. Diese Function kann nun durch die Coefficienten von φx und Θx rational ausgedrückt werden.

Setzt man $\Theta^m x$ an die Stelle von x, so hat man:

$$\psi\Theta^m x = (\Theta^m x + \alpha\Theta^{m+1}x + \alpha^2\Theta^{m+2}x + \cdots +$$
$$+ \alpha^{\mu-m}\Theta^\mu x + \alpha^{\mu-m+1}\Theta^{\mu+1}x + \cdots + \alpha^{\mu-1}\Theta^{\mu+m-1}x)^\mu;$$

man hat aber:

$$\Theta^\mu x = x,\quad \Theta^{\mu+1}x = \Theta x,\ \dots\ \Theta^{\mu+m-1}x = \Theta^{m-1}x,$$

daher:

$$\psi\Theta^m x = (\alpha^{\mu-m}x + \alpha^{\mu-m+1}\Theta x + \cdots +$$
$$+ \alpha^{\mu-1}\Theta^{m-1}x + \Theta^m x + \alpha\Theta^{m+1}x + \cdots + \alpha^{\mu-m-1}\Theta^{\mu-1}x)^\mu.$$

Nun ist $\alpha^\mu = 1$, daher:

$$\psi\Theta^m x = [\alpha^{\mu-m}(x + \alpha\Theta x + \alpha^2\Theta^2 x + \cdots + \alpha^{\mu-1}\Theta^{\mu-1}x)]^\mu$$
$$= \alpha^{\mu(\mu-m)}(x + \alpha\Theta x + \alpha^2\Theta^2 x + \cdots + \alpha^{\mu-1}\Theta^{\mu-1}x)^\mu,$$

da

$$\alpha^{\mu(\mu-m)} = 1$$

ist, so ersieht man, dass:

$$\psi\Theta^m x = \psi x$$

ist. Setzt man $m = 1, 2, 3, \dots\ \mu - 1$ und addirt hierauf, so findet man:

(29) $$\psi x = \frac{1}{\mu}\{\psi x + \psi\Theta x + \psi\Theta^2 x + \cdots + \psi\Theta^{\mu-1}x\}.$$

ψx ist daher eine rationale und symmetrische Function aller Wurzeln der Gleichung $\varphi x = 0$ und folglich kann man ψx rational durch bekannte Grössen ausdrücken.

Wenn $\psi x = v$ gesetzt wird, so folgt aus der Gleichung (28):

$$(30)\quad \sqrt[\mu]{v} = x + \alpha\,\Theta x + \alpha^2\Theta^2 x + \cdots + \alpha^{\mu-1}\Theta^{\mu-1}x.$$

Beachtet man dies und bezeichnet die μ Wurzeln der Gleichung

$$\alpha^\mu - 1 = 0$$

durch

$$(31)\qquad 1,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots\ \alpha_{\mu-1}$$

und die entsprechenden Werthe des v durch:

$$(32)\qquad v_0,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ \ldots\ v_{\mu-1},$$

so ergiebt die Gleichung (30), indem man für α der Reihe nach $1,\ \alpha_1,\ \alpha_2, \ldots \alpha_{\mu-1}$ setzt:

[141]

$$(33)\quad \begin{cases} \sqrt[\mu]{v_0} = x + \Theta x + \Theta^2 x + \cdots + \Theta^{\mu-1}x, \\ \sqrt[\mu]{v_1} = x + \alpha_1\Theta x + \alpha_1^2\Theta^2 x + \cdots + \alpha_1^{\mu-1}\Theta^{\mu-1}x, \\ \sqrt[\mu]{v_2} = x + \alpha_2\Theta x + \alpha_2^2\Theta^2 x + \cdots + \alpha_2^{\mu-1}\Theta^{\mu-1}x, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sqrt[\mu]{v_{\mu-1}} = x + \alpha_{\mu-1}\Theta x + \alpha_{\mu-1}^2\Theta^2 x + \cdots + \alpha_{\mu-1}^{\mu-1}\Theta^{\mu-1}x. \end{cases}$$

Addirt man diese Gleichungen, so hat man:

$$(34)\quad x = \frac{1}{\mu}\left\{-A + \sqrt[\mu]{v_1} + \sqrt[\mu]{v_2} + \sqrt[\mu]{v_3} + \cdots + \sqrt[\mu]{v_{\mu-1}}\right\},$$

hierbei ist $\sqrt[\mu]{v_0}$, welches eine constante Grösse ist, durch $-A$ ersetzt worden. [8])

Hierdurch kennt man die Wurzel x. Allgemein findet man die Wurzel $\Theta^m x$, indem man die erste der Gleichungen (33) mit 1, die zweite mit α_1^{-m}, die dritte mit α_2^{-m} u. s. w. multiplicirt und addirt; alsdann ergiebt sich:

$$(35)\qquad \Theta^m x =$$

$$= \frac{1}{\mu}\left\{-A + \alpha_1^{-m}\sqrt[\mu]{v_1} + \alpha_2^{-m}\sqrt[\mu]{v_2} + \cdots\ \alpha_{\mu-1}^{-m}\sqrt[\mu]{v_{\mu-1}}\right\}.$$ [9])

Giebt man m die Werthe $0, 1, 2, \ldots \mu - 1$, so hat man den Werth aller Wurzeln der Gleichung.

Der vorausgehende Ausdruck für die Wurzeln enthält allgemein eine $\mu - 1$-fache Anzahl verschiedener Radicale der Form $\sqrt[\mu]{v}$. Daher hat er eine $\mu^{\mu-1}$-fache Anzahl von Werthen, während die Gleichung $\varphi x = 0$ nur μ Wurzeln hat. Aber man kann dem Ausdruck für die Wurzeln eine andere Form geben, welche nicht dieser Schwierigkeit unterliegt. Wenn nämlich der Werth von $\sqrt[\mu]{v_1}$ festgelegt ist, so ist auch derjenige der anderen Radicale, wie wir sogleich sehen werden, bestimmt.

Wie auch immer die Zahl μ beschaffen ist, gleichgültig ob sie eine Primzahl oder keine Primzahl ist, so kann man stets eine Wurzel α der Gleichung $\alpha^\mu - 1 = 0$ finden, dass die Wurzeln:

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots \alpha_{\mu-1}$$

durch:

$$\alpha, \quad \alpha^2, \quad \alpha^3, \quad \ldots \alpha^{\mu-1} \tag{36}$$

dargestellt werden können.

Beachtet man dies, so hat man:

$$\left\{\begin{aligned} \sqrt[\mu]{v_k} &= x + \alpha^k \Theta x + \alpha^{2k} \Theta^2 x + \cdots + \alpha^{(\mu-1)k} \Theta^{\mu-1} x, \\ \sqrt[\mu]{v_1} &= x + \alpha \Theta x + \alpha^2 \Theta^2 x + \cdots + \alpha^{\mu-1} \Theta^{\mu-1} x. \end{aligned}\right. \tag{37}$$

Hieraus folgert man:

$$\left\{\begin{aligned} \sqrt[\mu]{v_k}\left(\sqrt[\mu]{v_1}\right)^{\mu-k} &= (x + \alpha^k \Theta x + \alpha^{2k} \Theta^2 x + \cdots + \alpha^{(\mu-1)k} \Theta^{\mu-1} x) \\ &\quad \times (x + \alpha \Theta x + \alpha^2 \Theta^2 x + \cdots + \alpha^{\mu-1} \Theta^{\mu-1} x)^{\mu-k}. \end{aligned}\right. \tag{38}$$

[**142**] Die rechte Seite dieser Gleichung ist eine rationale Function von x, welche ihren Werth nicht ändert, wenn man an die Stelle von x irgend eine andere Wurzel $\Theta^m x$ setzt; dies ersieht man leicht, indem man diese Substitution ausführt und auf die Gleichung $\Theta^{\mu+\nu} x = \Theta^\nu x$ Rücksicht nimmt. Bezeichnet man die fragliche Function, um die es sich handelt, mit ψx, so hat man:

$$\sqrt[\mu]{v_k} \cdot \left(\sqrt[\mu]{v_1}\right)^{\mu-k} = \psi x = \psi \Theta x = \psi \Theta^2 x = \cdots = \psi \Theta^{\mu-1} x,$$

und infolgedessen:

$$(39)\quad \sqrt[\mu]{v_k}\cdot\left(\sqrt[\mu]{v_1}\right)^{\mu-k} = \frac{1}{\mu}\{\psi x + \psi\Theta x + \psi\Theta^2 x + \cdots + \psi\Theta^{\mu-1}x\}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist eine rationale und symmetrische Function der Wurzeln, daher kann man sie durch bekannte Grössen ausdrücken. Bezeichnet man den Werth der rechten Seite mit a_k, so hat man:

$$(40)\quad \sqrt[\mu]{v_k}\cdot\left(\sqrt[\mu]{v_1}\right)^{\mu-k} = a_k,$$

und infolgedessen:

$$(41)\quad \sqrt[\mu]{v_k} = \frac{a_k}{v_1}\left(\sqrt[\mu]{v_1}\right)^k.$$

Mit Hülfe dieser Formel wird der Ausdruck für die Wurzel x:

$$(42)\quad x = \frac{1}{\mu}\left\{-A + \sqrt[\mu]{v_1} + \frac{a_2}{v_1}\left(\sqrt[\mu]{v_1}\right)^2 + \frac{a_3}{v_1}\left(\sqrt[\mu]{v_1}\right)^3 + \cdots + \frac{a_{\mu-1}}{v_1}\left(\sqrt[\mu]{v_1}\right)^{\mu-1}\right\}.$$ [10])

Dieser Ausdruck für x hat nur μ verschiedene Werthe, welche man erhält, indem man an die Stelle von $\sqrt[\mu]{v_1}$ die μ Werthe:

$$\sqrt[\mu]{v_1},\quad \alpha\sqrt[\mu]{v_1},\quad \alpha^2\sqrt[\mu]{v_1},\quad \ldots\ \alpha^{\mu-1}\sqrt[\mu]{v_1}$$

setzt.

Die Methode, welche wir im Voraufgegangenen zur Auflösung der Gleichung $\varphi x = 0$ befolgten, stimmt im Grunde mit derjenigen überein, von welcher Herr *Gauss* in seinen Disquisitiones arithmeticae [11]) pag. 645 et seq. Gebrauch gemacht hat, um eine gewisse Klasse von Gleichungen, zu denen er in seinen Untersuchungen über die Gleichungen $x^n - 1 = 0$ gelangt war, aufzulösen. Diese Gleichungen haben dieselbe Eigenthümlichkeit wie unsere Gleichung $\varphi x = 0$, nämlich dass alle ihre Wurzeln in der Form:

$$x,\quad \Theta x,\quad \Theta^2 x,\quad \ldots\ \Theta^{\mu-1}x$$

dargestellt werden können; Θx bedeutet dabei eine rationale Function.

Infolge dessen, was voraufgeht, können wir das folgende Theorem aussprechen:

Theorem III. Wenn die Wurzeln einer algebraischen Gleichung durch:

$$x, \quad \Theta x, \quad \Theta^2 x, \quad \ldots \Theta^{\mu-1} x$$

dargestellt werden können, [143] $\Theta^\mu x = x$ ist und Θx eine rationale Function von x und bekannten Grössen bedeutet, so ist diese Gleichung immer algebraisch lösbar.

Als Corollar folgert man das folgende

Theorem IV. Wenn zwei Wurzeln einer irreductiblen Gleichung, deren Grad eine Primzahl ist, in einem derartigen Verhältniss stehen, dass man eine rational durch die andere ausdrücken kann, so ist diese Gleichung algebraisch auflösbar.

Das folgt sofort aus der Gleichung (11)

$$\mu = m \cdot n,$$

denn, wenn μ eine Primzahl ist, so muss man $m = 1$ haben, und folglich drücken sich die Wurzeln durch x, Θx, $\Theta^2 x$, ... $\Theta^{\mu-1} x$ aus.

In dem Fall, dass alle bekannten Grössen von φx und Θx reell sind, erfreuen sich die Wurzeln der Gleichung $\varphi x = 0$ einer bemerkenswerthen Eigenschaft, die wir nun beweisen wollen.

Infolge des Voraufgegangenen sieht man, dass $a_{\mu-1}$ rational durch die Coefficienten von φx und Θx sowie durch α ausdrückbar ist. Wenn daher diese Coefficienten reell sind, so muss $a_{\mu-1}$ die Form:

$$a_{\mu-1} = a + b\sqrt{-1}$$

haben; $\sqrt{-1}$ tritt nur wegen der Grösse α, die gewöhnlich imaginär ist und allgemein den Werth

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{\mu} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{\mu}$$

haben kann, auf.

Aendert man in α das Vorzeichen von $\sqrt{-1}$ und bezeichnet dann mit $a'_{\mu-1}$ den entsprechenden Werth von $a_{\mu-1}$, so hat man:

$$a'_{\mu-1} = a - b\sqrt{-1}.$$

Infolge (40) ist es evident, dass $a'_{\mu-1} = a_{\mu-1}$ ist, daher ist $b = 0$ und

$$a_{\mu-1} = a. \tag{43}$$

$a_{\mu-1}$ hat also stets einen reellen Werth. Auf dieselbe Weise beweist man, dass:

$$v_1 = c + d\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad v_{\mu-1} = c - d\sqrt{-1},$$

wobei c und d reell sind.

Daher wird:

$$v_1 + v_{\mu-1} = 2c$$
$$v_1 \cdot v_{\mu-1} = a^\mu .$$

Hieraus folgert man:

$$(44) \qquad v_1 = c + \sqrt{-1}\sqrt{(a^\mu - c^2)},$$

[**144**] und in Folge dessen ist $\sqrt{a^\mu - c^2} = d$; hieraus ersieht man, dass $\sqrt{a^\mu - c^2}$ stets einen reellen Werth hat.

Beachtet man dies, so kann man:

$$(45) \qquad c = (\sqrt{\varrho})^\mu \cdot \cos\delta, \quad \sqrt{a^\mu - c^2} = (\sqrt{\varrho})^\mu \cdot \sin\delta$$

setzen; hierbei ist ϱ eine positive Grösse.

Hieraus folgert man:

$$c^2 + [\sqrt{a^\mu - c^2}]^2 = (\sqrt{\varrho})^{2\mu},$$

d. h.

$$(46) \qquad a^\mu = \varrho^\mu;$$

folglich wird ϱ gleich dem numerischen Werth von a. Ueberdies sieht man, dass a immer positiv ist, wenn μ eine ungerade Zahl ist.

Kennt man ϱ und δ, so hat man:

$$v_1 = (\sqrt{\varrho})^\mu \cdot (\cos\delta + \sqrt{-1}\sin\delta)$$

und folglich:

$$\sqrt[\mu]{v_1} = \sqrt{\varrho}\left(\cos\frac{\delta + 2m\pi}{\mu} + \sqrt{-1}\sin\frac{\delta + 2m\pi}{\mu}\right).$$

Setzt man diesen Werth von $\sqrt[\mu]{v_1}$ in den Ausdruck von x (42), so nimmt er die Form an:

$$(47) \quad x=\frac{1}{\mu}\Big\{-A+\sqrt{\varrho}\left(\cos\frac{\delta+2m\pi}{\mu}+\sqrt{-1}\sin\frac{\delta+2m\pi}{\mu}\right)$$

$$+(f+g\sqrt{-1})\cdot\left(\cos\frac{2(\delta+2m\pi)}{\mu}+\sqrt{-1}\sin\frac{2(\delta+2m\pi)}{\mu}\right)$$

$$+(F+G\sqrt{-1})\sqrt{\varrho}\cdot\left(\cos\frac{3(\delta+2m\pi)}{\mu}+\sqrt{-1}\sin\frac{3(\delta+2m\pi)}{\mu}\right)$$

$$+(f_1+g_1\sqrt{-1})\cdot\left(\cos\frac{4(\delta+2m\pi)}{\mu}+\sqrt{-1}\sin\frac{4(\delta+2m\pi)}{\mu}\right)+$$

$$+\text{etc.}\Big\},$$

ϱ, A, f, g, F, G u. s. w. sind rationale Functionen von $\cos\frac{2\pi}{\mu}$, $\sin\frac{2\pi}{\mu}$ und den Coefficienten von φx und Θx. Man findet alle Wurzeln, indem man m die Werthe 0, 1, 2, 3, ... $\mu - 1$ giebt.

Der voraufgehende Ausdruck für x ergiebt das

Theorem V. Um die Gleichung $\varphi x = 0$ aufzulösen, genügt es:

1) den Umfang des ganzen Kreises in μ gleiche Theile zu theilen,
2) einen Winkel δ, den man construiren kann, in μ gleiche Theile zu theilen,
3) die Quadratwurzel aus einer einzigen Grösse ϱ zu ziehen. [12])

Dieses Theorem ist nur die Erweiterung eines ähnlichen Theorems, welches Herr *Gauss* in dem oben citirten Werke pag. 651 [11]) ohne Beweis angiebt.

[**145**] Es ist noch zu bemerken, dass die Wurzeln der Gleichung $\varphi x = 0$ entweder sämmtlich reell oder sämmtlich imaginär sind. Wenn eine Wurzel x reell ist, so sind es auch thatsächlich die anderen, wie die Ausdrücke:

$$\Theta x, \quad \Theta^2 x, \quad \ldots \ \Theta^{\mu-1} x,$$

welche nur reelle Grössen enthalten, es zeigen. Wenn hingegen x imaginär ist, so sind es auch die andern Wurzeln, denn wenn z. B. $\Theta^m x$ reell wäre, so wäre auch $\Theta^{\mu-m}(\Theta^m x) = \Theta^\mu x = x$ gleichfalls gegen die Voraussetzung reell. In dem ersten Falle ist a positiv und in dem zweiten negativ.

Wenn μ eine ungerade Zahl ist, so sind alle Wurzeln reell.

Die Methode, welche wir in diesem Paragraphen angegeben haben, um die Gleichung $\varphi x = 0$ aufzulösen, ist in allen Fällen anwendbar, gleichgültig ob die Zahl μ eine Primzahl ist oder nicht; wenn aber μ eine zusammengesetzte Zahl ist, so giebt es noch eine andere Methode, welche einige Vereinfachungen darbietet und die wir noch in wenigen Worten auseinandersetzen wollen.

Wenn $\mu = m \cdot n$ ist, so können die Wurzeln:

$$x, \quad \theta x, \quad \theta^2 x, \quad \ldots \quad \theta^{\mu-1} x$$

auf folgende Art gruppirt werden:

$$\begin{array}{lllll}
x, & \theta^m x, & \theta^{2m} x, & \ldots & \theta^{(n-1)m} x, \\
\theta x, & \theta^{m+1} x, & \theta^{2m+1} x, & \ldots & \theta^{(n-1)m+1} x, \\
\theta^2 x, & \theta^{m+2} x, & \theta^{2m+2} x, & \ldots & \theta^{(n-1)m+2} x, \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\theta^{m-1} x, & \theta^{2m-1} x, & \theta^{3m-1} x, & \ldots & \theta^{mn-1} x.
\end{array}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\theta^m x = \theta_1 x, \tag{48}$$

$$x = x_1, \quad \theta x = x_2, \quad \theta^2 x = x_3, \quad \ldots \quad \theta^{m-1} x = x_m, \tag{49}$$

so kann man die Wurzeln auf folgende Art schreiben:

$$\left\{\begin{array}{llllll}
1') & x_1, & \theta_1 x_1, & \theta_1^2 x_1, & \ldots & \theta_1^{n-1} x_1, \\
2') & x_2, & \theta_1 x_2, & \theta_1^2 x_2, & \ldots & \theta_1^{n-1} x_2, \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
m') & x_m, & \theta_1 x_m, & \theta_1^2 x_m, & \ldots & \theta_1^{n-1} x_m.
\end{array}\right. \tag{50}$$

Infolge dessen, was man im § 2 gesehen hat, kann man daher die Gleichung $\varphi x = 0$, welche vom Grade $m \cdot n$ ist, in m Gleichungen vom Grade n, deren Coefficienten von einer Gleichung vom Grade m abhängen, zerlegen. Die Wurzeln dieser m Gleichungen werden die Wurzen $1'$, respective $2'$, ... m' sein.

Wenn n eine andere zusammengesetzte Zahl $m_1 \cdot n_1$ ist, so kann man jede der Gleichungen vom Grade n auf dieselbe Art in m_1 Gleichungen [146] vom Grade n_1 zerlegen; die

Coefficienten dieser Gleichungen hängen von einer Gleichung vom Grade m_1 ab. Wenn n_1 ebenfalls noch eine zusammengesetzte Zahl ist, so kann man die Zerlegung auf dieselbe Art fortsetzen.

Theorem VI. Setzt man allgemein:

$$\mu = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \; . \; . \; . \; m_n \tag{51}$$

voraus, so wird die Auflösung der Gleichung $\varphi x = 0$ auf diejenige von n Gleichungen der Grade:

$$m_1, \quad m_2, \quad m_3, \quad \ldots \; m_n$$

zurückgeführt.

Es genügt sogar, eine einzige Wurzel von jeder dieser Gleichungen zu kennen, denn wenn man eine Wurzel der vorgelegten Gleichung kennt, so kann man alle anderen Wurzeln als rationale Functionen dieser ausdrücken.

Die vorstehende Methode ist im Grunde dieselbe, welche Herr *Gauss* für die Reduction der Gleichung mit zwei Gliedern $x^{\mu} - 1 = 0$ angiebt.

Um die vorstehende Zerlegung der Gleichung $\varphi x = 0$ in andere von niedrigerem Grade klarer darzuthun, behandeln wir $\mu = 30 = 5 \cdot 3 \cdot 2$ als Beispiel.

In diesem Falle sind:

$$x, \quad \theta x, \quad \theta^2 x, \quad \ldots \; \theta^{29} x$$

die Wurzeln.

Zuerst bilden wir eine Gleichung 6. Grades, deren Wurzeln:

$$x, \quad \theta^5 x, \quad \theta^{10} x, \quad \theta^{15} x, \quad \theta^{20} x, \quad \theta^{25} x$$

sind. Sei $R = 0$ diese Gleichung, so kann man ihre Coefficienten durch eine Grösse y, welche Wurzel einer Gleichung fünften Grades $P = 0$ ist, rational bestimmen.

Da der Grad der Gleichung $R = 0$ selbst eine zusammengesetzte Zahl ist, so bilden wir eine Gleichung dritten Grades $R_1 = 0$, deren Wurzeln:

$$x, \quad \theta^{10} x, \quad \theta^{20} x$$

sind; die Coefficienten von R_1 sind rationale Functionen von y und einer Grösse z, welche Wurzel einer Gleichung zweiten Grades $P_1 = 0$ ist; bei dieser letzteren Gleichung sind die Coefficienten rational durch y ausdrückbar.

Im Folgenden geben wir das Tableau der Operationen an:

$$x^3 + f(y, z) \cdot x^2 + f_1(y, z) \cdot x + f_2(y, z) = 0,$$
$$z^2 + fy \cdot z + f_1 y = 0,$$
$$y^5 + A_1 \cdot y^4 + A_2 \cdot y^3 + A_3 \cdot y^2 + A_4 \cdot y + A_5 = 0.$$

Man kann auch mit einer Gleichung zweiten Grades in x oder mit einer Gleichung fünften Grades beginnen.

[**147**] Nehmen wir die allgemeine Gleichung $\varphi x = 0$ wieder vor.

Setzen wir $\mu = m \cdot n$ voraus, so kann man:

$$x^n + fy \cdot x^{n-1} + f_1 y \cdot x^{n-2} + \cdots = 0 \tag{52}$$

setzen; y ist dabei durch eine Gleichung m-ten Grades, nämlich:

$$y^m + A \cdot y^{m-1} + \cdots = 0, \tag{53}$$

bestimmt; alle Coefficienten der letzten Gleichung sind rational durch bekannte Grössen ausgedrückt.

Beachtet man dies und sind:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdots m_\omega \quad \text{und} \\ \mu = m_1 \cdot n_1, \quad \mu = m_2 \cdot n_2, \quad \ldots \; \mu = m_\omega \cdot n_\omega \end{array} \right. \tag{54}$$

verschiedene Arten, die Zahl μ in zwei Factoren zu zerlegen, so kann man die vorgelegte Gleichung $\varphi x = 0$ auf die folgenden ω verschiedenen Arten in zwei andere zerlegen:

(1) $F_1(x, y_1) = 0$, deren Wurzeln x, $\Theta^{m_1} x$, $\Theta^{2m_1} x$, ... $\Theta^{(n_1-1)m_1} x$ sind und deren Coefficienten sich als rationale Functionen einer Grösse y_1, welche die Wurzel einer Gleichung $f_1(y_1) = 0$ vom Grade m_1 ist, ausdrücken lassen.

(2) $F_2(x, y_2) = 0$, deren Wurzeln x, $\Theta^{m_2} x$, $\Theta^{2m_2} x$, ... $\Theta^{(n_2-1)m_2} x$ sind und deren Coefficienten sich als rationale Functionen einer Grösse y_2, welche die Wurzel einer Gleichung $f_2(y_2) = 0$ vom Grade m_2 ist, ausdrücken lassen.

. . . .

(ω) $F_\omega(x, y_\omega) = 0$, deren Wurzeln x, $\Theta^{m_\omega} x$, $\Theta^{2m_\omega} x$, ... $\Theta^{(n_\omega-1)m_\omega} x$ sind und deren Coefficienten sich als rationale Functionen einer Grösse y_ω, welche die Wurzel einer Gleichung $f_\omega(y_\omega) = 0$ vom Grade m_ω ist, ausdrücken lassen.

Nehmen wir jetzt an, dass $m_1, m_2, \ldots m_\omega$ paarweise relativ prim zu einander seien, so behaupte ich dann, dass man den Werth von x rational durch die Grössen $y_1, y_2, y_3, \ldots y_\omega$ ausdrücken kann. Wenn $m_1, m_2, \ldots m_\omega$ zu einander relativ prim sind, so ist es klar, dass es nur eine einzige Wurzel giebt, welche gleichzeitig allen Gleichungen:

$$(55) \quad F_1(x, y_1) = 0\,, \quad F_2(x, y_2) = 0\,, \quad \ldots \quad F_\omega(x, y_\omega) = 0$$

genügt, nämlich die Wurzel x. Daher kann man nach einem bekannten Theorem x rational durch die Coefficienten dieser Gleichungen und folglich durch die Grössen $y_1, y_2, \ldots y_\omega$ ausdrücken.

Hierdurch hat man die Auflösung der vorgelegten Gleichung auf diejenige von ω Gleichungen: $f_1 y_1 = 0$, $f_2 y_2 = 0$, $\ldots$ $f_\omega y_\omega = 0$, welche respective von den Graden $m_1, m_2, \ldots m_\omega$ und deren Coefficienten rationale Functionen der Coefficienten von φx und Θx sind, zurückgeführt.

[148] Will man es so einrichten, dass die Gleichungen:

$$(56) \qquad f_1 y_1 = 0\,, \quad f_2 y_2 = 0\,, \quad \ldots \quad f_\omega y_\omega = 0$$

von möglichst niedrigem Grade sind, so muss man $m_1, m_2, \ldots m_\omega$ derartig wählen, dass diese Zahlen Potenzen von Primzahlen sind. Wenn z. B. die vorgelegte Gleichung $\varphi x = 0$ vom Grade:

$$(57) \qquad \mu = \varepsilon_1^{\nu_1} \cdot \varepsilon_2^{\nu_2} \ldots \varepsilon_\omega^{\nu_\omega}$$

ist, wobei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\omega$ von einander verschiedene Primzahlen sind, so hat man:

$$(58) \qquad m_1 = \varepsilon_1^{\nu_1}; \quad m_2 = \varepsilon_2^{\nu_2}; \quad \ldots \quad m_\omega = \varepsilon_\omega^{\nu_\omega}.$$

Da die vorgelegte Gleichung algebraisch auflösbar ist, so sind es auch die Gleichungen (56), denn die Wurzeln dieser Gleichungen sind rationale Functionen von x. Man kann dieselben leicht auf die folgende Art auflösen:

Die Grösse y ist eine rationale und symmetrische Function der Wurzeln der Gleichung (52), d. h. von:

$$(59) \qquad x\,, \quad \Theta^m x\,, \quad \Theta^{2m} x\,, \quad \ldots \quad \Theta^{(n-1)m} x.$$

Sei

$$(60) \quad y = Fx = f(x, \Theta^m x, \Theta^{2m} x, \ldots \Theta^{(n-1)m} x)\,,$$

so sind die Wurzeln der Gleichung (53):

(61) $$Fx, \quad F(\Theta x), \quad F(\Theta^2 x), \quad \ldots F(\Theta^{m-1} x);$$

ich behaupte nun, dass man diese Wurzeln auf die folgende Art ausdrücken kann:

(62) $$y, \quad \lambda y, \quad \lambda^2 y, \quad \ldots \lambda^{m-1} y;$$

λ bedeutet hierbei eine rationale Function von y und bekannten Grössen.

Man hat:

(63) $$F(\Theta x) = f\{\Theta x, \quad \Theta(\Theta^m x), \quad \Theta(\Theta^{2m} x) \ldots \Theta(\Theta^{(n-1)m} x)\},$$

daher wird $F(\Theta x)$ ebenso wie Fx eine rationale und symmetrische Function der Wurzeln x, $\Theta^m x$, ... $\Theta^{(n-1)m} x$, mithin kann man durch den Process, der in (24) gefunden ist, $F(\Theta x)$ rational durch Fx ausdrücken. Sei daher:

$$F\Theta x = \lambda Fx = \lambda y,$$

so hat man, indem man (in Folge des ersten Theorems) x durch Θx, $\Theta^2 x$, ... $\Theta^{m-1} x$ ersetzt:

$$F\Theta^2 x = \lambda F\Theta x = \lambda^2 y,$$
$$F\Theta^3 x = \lambda F\Theta^2 x = \lambda^3 y,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$F\Theta^{m-1} x = \lambda F\Theta^{m-2} x = \lambda^{m-1} y;$$

was zu beweisen war.

Da jetzt die Wurzeln der Gleichung (53) durch

$$y, \quad \lambda y, \quad \lambda^2 y, \quad \ldots \lambda^{m-1} y$$

dargestellt werden können, so kann man diese Gleichung auf dieselbe Art wie [**149**] die Gleichung $\varphi x = 0$ algebraisch lösen. (Siehe Theorem III.)

Wenn m die Potenz einer Primzahl, $m = \varepsilon^\nu$ ist, so kann man y noch durch ν Gleichungen vom Grade ε bestimmen. (Siehe Theorem VI.)

Wenn man bei dem Theorem III voraussetzt, dass μ eine Potenz von 2 ist, so hat man als Corollar das folgende Theorem:

Theorem VII. Wenn die Wurzeln einer Gleichung vom Grade 2^{ω} durch:

$$x, \quad \Theta x, \quad \Theta^2 x, \quad \ldots \Theta^{2^{\omega}-1} x, \quad \text{wobei } \Theta^{2^{\omega}} x = x,$$

dargestellt werden können, so kann diese Gleichung durch Ausziehung von ω Quadratwurzeln gelöst werden.

Wendet man dieses Theorem auf die Gleichung $\frac{x^{1+2^{\omega}}-1}{x-1}=0$, wo $1+2^{\omega}$ eine Primzahl ist, an, so ergiebt es den von Herrn *Gauss* für den Kreis gefundenen Satz.

§ 4.

Gleichungen, bei denen alle Wurzeln rational durch eine von ihnen ausgedrückt werden können.

Wir haben im Vorangegangenen (Theorem III) gesehen, dass eine Gleichung beliebigen Grades, deren Wurzeln durch:

$$x, \quad \Theta x, \quad \Theta^2 x, \quad \ldots \Theta^{\mu-1} x$$

ausgedrückt werden können, immer algebraisch auflösbar ist.

In diesem Falle sind alle Wurzeln durch eine von ihnen rational ausgedrückt; aber eine Gleichung, deren Wurzeln diese Eigenthümlichkeit haben, ist nicht immer algebraisch auflösbar;[13]) trotzdem giebt es ausser dem im Voraufgehenden betrachteten Falle noch einen anderen, in dem dies statt hat. Man gewinnt das folgende Theorem:

Theorem VIII. Es sei $\chi x = 0$ irgend eine algebraische Gleichung, bei der alle Wurzeln rational durch eine von ihnen, welche wir mit x bezeichnen, ausgedrückt werden können. Seien Θx und $\Theta_1 x$ irgend zwei andere Wurzeln, so ist die vorgelegte Gleichung algebraisch auflösbar, wenn man

$$\Theta \Theta_1 x = \Theta_1 \Theta x \text{ hat.}$$ [14])

Der Beweis dieses Theorems kann sofort, wie wir sehen werden, auf die im § 2 auseinandergesetzte Theorie zurückgeführt werden.

Wenn man die Wurzel x kennt, so hat man zu gleicher Zeit alle anderen, es genügt daher, den Werth von x zu suchen.

Wenn die Gleichung:

$$(64) \qquad \chi x = 0$$

nicht irreductibel ist, so sei:

$$(65) \qquad \varphi x = 0$$

[**150**] die Gleichung niedrigsten Grades, welcher die Wurzel x, wenn die Coefficienten dieser Gleichung nur bekannte Grössen enthalten, genügen kann. Dann befinden sich die Wurzeln der Gleichung $\varphi x = 0$ unter denjenigen der Gleichung $\chi x = 0$ (vergleiche Theorem I), und folglich können sie rational durch eine von ihnen ausgedrückt werden.

Beachtet man dies, so sei Θx eine von x verschiedene Wurzel; in Folge dessen, was man im ersten Paragraphen gesehen hat, können die Wurzeln der Gleichung $\varphi x = 0$, wie folgt, ausgedrückt werden:

$$\begin{array}{lllll} x, & \Theta x, & \Theta^2 x, & \ldots & \Theta^{n-1} x, \\ x_1, & \Theta x_1, & \Theta^2 x_1, & \ldots & \Theta^{n-1} x_1, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{m-1}, & \Theta x_{m-1}, & \Theta^2 x_{m-1}, & \ldots & \Theta^{n-1} x_{m-1}; \end{array}$$

bildet man die Gleichung:

$$(66) \qquad x^n + A'x^{n-1} + A''x^{n-2} + A'''x^{n-3} + \cdots + A^{(n-1)}x + A^{(n)} = 0,$$

deren Wurzeln x, Θx, $\Theta^2 x$, $\ldots$ $\Theta^{n-1} x$ sind, so können die Coefficienten A', A'', $\ldots$ $A^{(n)}$ rational durch eine Grösse y ausgedrückt werden; diese ist Wurzel einer irreductiblen*) Gleichung:

$$(67) \quad y^m + p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} + \cdots + p_{m-1} y + p_m = 0,$$

deren Coefficienten bekannte Grössen sind (siehe § 2).

---

*) Man beweist leicht, dass diese Gleichung nicht reductibel sein kann. Es sei $R = 0$ die irreductible Gleichung in y und ν ihr Grad. Eliminirt man y, so hat man eine Gleichung vom Grade $n \cdot \nu$ in x; daher ist $n\nu \geqq \mu$. Man hat aber:

$$\mu = nm,$$

daher muss $\nu \geqq m$ sein; dies ist unmöglich, denn ν ist kleiner als m. U. s. w.

Die Bestimmung von x kann vermöge zweier Gleichungen (66) und (67) ausgeführt werden. Die erste dieser Gleichungen ist algebraisch auflösbar, wenn man die Coefficienten, d. h. die Grösse y als bekannt voraussetzt (siehe Theorem III). Was die Gleichung in y betrifft, so werden wir beweisen, dass ihre Wurzeln dieselbe Eigenthümlichkeit wie diejenigen der vorgelegten Gleichung $\varphi x = 0$, nämlich rational durch eine von ihnen ausdrückbar zu sein, besitzen.

Die Grösse y ist (siehe 15) eine gewisse, rationale und symmetrische Function der Wurzeln $x, \Theta x, \Theta^2 x, \ldots \Theta^{n-1} x$. Setzt man:

68) $$\begin{cases} y = f(x, \Theta x, \Theta^2 x, \ldots \Theta^{n-1} x), \\ \text{so sind die anderen Wurzeln der Gleichung (67):} \\ y_1 = f(x_1, \Theta x_1, \Theta^2 x_1, \ldots \Theta^{n-1} x_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{m-1} = f(x_{m-1}, \Theta x_{m-1}, \Theta^2 x_{m-1}, \ldots \Theta^{n-1} x_{m-1}). \end{cases}$$

[151] Jetzt in dem hier betrachteten Falle sind $x_1, \ldots x_{m-1}$ rationale Functionen der Wurzel x. Setzen wir in Folge dessen:

$$x_1 = \Theta_1 x, \quad x_2 = \Theta_2 x, \ldots x_{m-1} = \Theta_{m-1} x,$$

so haben die Wurzeln der Gleichung (67) die Form:

$$y_1 = f(\Theta_1 x, \Theta\Theta_1 x, \Theta^2 \Theta_1 x, \ldots \Theta^{n-1} \Theta_1 x).$$

Nach unserer Annahme haben die Functionen Θ und Θ_1 die Eigenschaft, dass:

$$\Theta\Theta_1 x = \Theta_1 \Theta x$$

ist; in Folge des Theorems I hat diese Gleichung auch statt, wenn man an die Stelle von x irgend eine andere Wurzel der Gleichung $\varphi x = 0$ setzt. Hieraus folgert man:

$$\Theta^2 \Theta_1 x = \Theta\Theta_1 \Theta x = \Theta_1 \Theta^2 x,$$
$$\Theta^3 \Theta_1 x = \Theta\Theta_1 \Theta^2 x = \Theta_1 \Theta^3 x,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\Theta^{n-1} \Theta_1 x = \Theta\Theta_1 \Theta^{n-2} x = \Theta_1 \Theta^{n-1} x.$$

Der Ausdruck für y_1 wird hierdurch:

$$y_1 = f(\Theta_1 x, \Theta_1 \Theta x, \Theta_1 \Theta^2 x, \ldots \Theta_1 \Theta^{n-1} x),$$

und man sieht, dass y_1 ebenso wie y eine rationale und symmetrische Function der Wurzeln:

$$x, \quad \Theta x, \quad \Theta^2 x, \ \ldots \ \Theta^{n-1} x$$

ist. Daher kann man (siehe § 2) y_1 rational durch y und durch bekannte Grössen ausdrücken. Dieselbe Betrachtungsweise lässt sich auf jede andere Wurzel der Gleichung (67) anwenden. Seien jetzt λy und $\lambda_1 y$ irgend zwei Wurzeln, so behaupte ich, dass man:

$$\lambda \lambda_1 y = \lambda_1 \lambda y$$

hat. Da man z. B.

$$\lambda y = f(\Theta_1 x, \ \Theta \Theta_1 x, \ \ldots \ \Theta^{n-1} \Theta_1 x)$$

hat, wenn:

$$y = f(x, \ \Theta x, \ldots \ \Theta^{n-1} x)$$

ist, so hat man, indem man $\Theta_2 x$ an die Stelle von x setzt:

$$\lambda y_2 = f(\Theta_1 \Theta_2 x, \ \Theta \Theta_1 \Theta_2 x, \ \ldots \ \Theta^{n-1} \Theta_1 \Theta_2 x),$$

wo $\quad y_2 = f(\Theta_2 x, \quad \Theta \Theta_2 x, \quad \ldots \ \Theta^{n-1} \Theta_2 x) = \lambda_1 y$

ist, daher ist:

$$\lambda \lambda_1 y = f(\Theta_1 \Theta_2 x, \ \Theta \Theta_1 \Theta_2 x, \ \ldots \ \Theta^{n-1} \Theta_1 \Theta_2 x)$$

und auf gleiche Weise:

$$\lambda_1 \lambda y = f(\Theta_2 \Theta_1 x, \ \Theta \Theta_2 \Theta_1 x, \ \ldots \ \Theta^{n-1} \Theta_2 \Theta_1 x);$$

hieraus folgt, weil $\Theta_1 \Theta_2 x = \Theta_2 \Theta_1 x$ ist, dass:

$$\lambda \lambda_1 y = \lambda_1 \lambda y.$$

Die Wurzeln der Gleichung (67) besitzen daher genau dieselbe Eigenthümlichkeit, wie diejenigen der Gleichung $\varphi x = 0$.

[**152**] Beachtet man dies, so kann man auf die Gleichung (67) dasselbe Verfahren wie auf die Gleichung $\varphi x = 0$ anwenden, d. h. die Bestimmung von y kann vermöge zweier Gleichungen ausgeführt werden, von denen eine algebraisch auflösbar ist und die andere die Eigenthümlichkeit der Gleichung $\varphi x = 0$ besitzt.

Daher kann auch auf diese letztere Gleichung dasselbe Verfahren angewandt werden. Fährt man so fort, so ist es klar, dass sich die Bestimmung von x vermöge einer gewissen

Anzahl von Gleichungen, welche alle algebraisch auflösbar sein werden, ausführen lässt. Setzt man daher die Grössen, welche mit x die Functionen:

$$\varphi x\,,\quad \Theta x\,,\quad \Theta_1 x\,,\quad \Theta_2 x\,,\quad \ldots\ \Theta_{m-1} x$$

bilden, als bekannt voraus, so ist endlich die Gleichung $\varphi x = 0$ mittelst algebraischer Operationen auflösbar.

Es ist klar, dass der Grad jeder der Gleichungen, auf welche sich die Bestimmung von x reducirt, ein Factor von μ, welches den Grad der Gleichung $\varphi x = 0$ angiebt, ist. Hieraus folgt:

Theorem IX. Bezeichnet man die Grade dieser Gleichungen respective durch:

$$n\,,\quad n_1\,,\quad n_2\,,\quad \ldots\ n_\omega\,,$$

so hat man:

$$\mu = n \cdot n_1 \cdot n_2 \cdots n_\omega\,.$$

Bringt man das Voraufgehende mit dem, was im § 3 auseinandergesetzt wurde, in Zusammenhang, so hat man folgendes Theorem:

Theorem X. Setzt man den Grad μ der Gleichung $\varphi x = 0$ auf folgende Art zerlegt voraus:

$$\mu = \varepsilon_1^{\nu_1} \cdot \varepsilon_2^{\nu_2} \cdot \varepsilon_3^{\nu_3} \cdots \varepsilon_\alpha^{\nu_\alpha}\,, \tag{69}$$

wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_\alpha$ Primzahlen sind, so kann die Bestimmung von x mittelst der Auflösung von ν_1 Gleichungen vom Grade ε_1, von ν_2 Gleichungen vom Grade ε_2, u. s. w. ausgeführt werden; alle diese Gleichungen sind algebraisch auflösbar.[15])

In dem Falle, dass $\mu = 2^\nu$ ist, kann man den Werth von x vermittelst der Ausziehung von ν Quadratwurzeln finden.

§ 5.

Anwendung auf die Kreisfunctionen.

Bezeichnet man mit a die Grösse $\frac{2\pi}{\mu}$, so weiss man, dass man eine algebraische Gleichung vom Grade μ finden kann, deren Wurzeln die μ Grössen:

$$\cos a\,,\quad \cos 2a\,,\quad \cos 3a\,,\quad \ldots\ \cos \mu a$$

[**153**] und deren Coefficienten rationale Zahlen sind. Diese Gleichung ist:

$$(70)\quad x^{\mu} - \frac{\mu}{4}x^{\mu-2} + \frac{1}{16}\frac{\mu(\mu-3)}{1\cdot 2}x^{\mu-4} + \cdots = 0.$$[16])

Wir werden sehen, dass diese Gleichung dieselbe Eigenschaft wie die Gleichung $\chi x = 0$, welche wir im vorangehenden Paragraphen betrachteten, hat.

Sei $\cos a = x$, so hat man, wie auch immer a sei, nach einer bekannten Formel:

$$(71)\qquad \cos ma = \Theta(\cos a);$$

hierbei bezeichnet Θ eine ganze Function. Daher ist $\cos ma$, welches irgend eine Wurzel der Gleichung (70) ausdrückt, eine rationale Function der Wurzel x. Sei $\Theta_1 x$ eine andere Wurzel, so behaupte ich, dass man:

$$\Theta\Theta_1 x = \Theta_1\Theta x$$

hat. Sei $\Theta_1 x = \cos m'a$, so ergiebt die Formel (71), indem man $m'a$ an die Stelle von a setzt:

$$\cos(m\,m'a) = \Theta(\cos m'a) = \Theta\Theta_1 x.$$

Auf dieselbe Art hat man:

$$\cos(m'ma) = \Theta_1(\cos ma) = \Theta_1\Theta x;$$

daher ist:

$$\Theta\Theta_1 x = \Theta_1\Theta x.$$

Nach dem, was man in dem vorangegangenen Paragraphen gesehen hat, kann

$$x \quad \text{oder} \quad \cos a = \cos\frac{2\pi}{\mu}$$

algebraisch bestimmt werden. Dies ist bekannt.

Setzen wir jetzt voraus, dass μ eine Primzahl $= 2n+1$ ist, so sind die Wurzeln der Gleichung (70):

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1},\quad \cos\frac{4\pi}{2n+1},\quad \cdots \cos\frac{4n\pi}{2n+1},\quad \cos 2\pi.$$

Die letzte Wurzel $\cos 2\pi$ ist gleich der Einheit, daher ist die Gleichung (70) durch $x - 1$ theilbar. Die anderen Wurzeln werden immer paarweise unter einander gleich, denn man hat:

$\cos\frac{2m\pi}{2n+1} = \cos\frac{(2n+1-m)\,2\pi}{2n+1}$; daher kann man eine Gleichung mit den Wurzeln:

$$(72)\qquad \cos\frac{2\pi}{2n+1},\quad \cos\frac{4\pi}{2n+1},\quad \ldots \cos\frac{2n\pi}{2n+1}$$

finden.

Diese Gleichung ist:

$$(73)\ x^n + \frac{1}{2}x^{n-1} - \frac{1}{4}(n-1)x^{n-2} - \frac{1}{8}(n-2)x^{n-3}$$

$$+\frac{1}{16}\cdot\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}x^{n-4} + \frac{1}{32}\cdot\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}x^{n-5}\ldots = 0.$$ [16])

Beachtet man dies und sei:

[154]

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1} = x = \cos a,$$

so hat man nach dem Voraufgegangenen:

$$\cos\frac{2m\pi}{2n+1} = \Theta x = \cos ma.$$

Die Gleichung (73) wird daher durch die Wurzeln:

$$(74)\qquad x,\quad \Theta x,\quad \Theta^2 x,\quad \Theta^3 x,\quad \ldots$$

befriedigt.

Wie auch immer der Werth von a sei, so hat man:

$$\Theta(\cos a) = \cos ma.$$

Hieraus folgert man successiv:

$$\Theta^2(\cos a) = \Theta(\cos ma) = \cos m^2 a,$$
$$\Theta^3(\cos a) = \Theta(\cos m^2 a) = \cos m^3 a,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Theta^\mu(\cos a) = \Theta(\cos m^{\mu-1} a) = \cos m^\mu x.$$

Die Wurzeln (74) werden daher:

$$(75)\ \cos a,\quad \cos ma,\quad \cos m^2 a,\quad \cos m^3 a,\quad \ldots \cos m^\mu a,\ \ldots$$

Dies vorausgesetzt, behaupte ich, wenn m für den Modul $2n+1$ eine Primitivwurzel[2]) ist (siehe *Gauss*, Disquis. arithm., pag. 53)[11]), dass alle Wurzeln:

(76) $\cos a\,, \quad \cos ma\,, \quad \cos m^2 a\,, \quad \ldots \cos m^{n-1} a$

unter einander verschieden sind. Hätte man nämlich:

$$\cos m^\mu a = \cos m^\nu a\,,$$

wo μ und ν kleiner als n sind, so würde man folgern:

$$m^\mu a = \pm m^\nu a + 2k\pi\,,$$

wobei k eine ganze Zahl ist. Setzt man für a seinen Werth $\frac{2\pi}{2n+1}$, so ergiebt dies:

$$m^\mu = \pm m^\nu + k(2n+1)\,;$$

nun ist

$$m^\mu \mp m^\nu = m^\nu(m^{\mu-\nu} \mp 1) = k(2n+1)\,,$$

folglich ist:

$$m^{2(\mu-\nu)} - 1$$

durch $2n+1$ theilbar; dies ist aber unmöglich, denn $2(\mu-\nu)$ ist kleiner als $2n$ und wir haben vorausgesetzt, dass m eine Primitivwurzel ist.

Man hat noch:

$$\cos m^n a = \cos a\,,$$

denn $m^{2n} - 1 = (m^n - 1)(m^n + 1)$ ist durch $2n+1$ theilbar; daher:

$$m^n = -1 + k(2n+1)\,,$$

und folglich:

$$\cos m^n a = \cos(-a + k\cdot 2\pi) = \cos a\,.$$

[155] Hieraus ersieht man, dass die n Wurzeln der Gleichung (73) sich durch (76), d. h. durch:

$$x\,, \quad \Theta x\,, \quad \Theta^2 x\,, \quad \Theta^3 x\,, \quad \ldots \quad \Theta^{n-1} x\,, \quad \text{wo } \Theta^n x = x\,,$$

ausdrücken lassen. In Folge des Theorems III ist daher diese Gleichung algebraisch auflösbar.

Wenn $n = m_1 \cdot m_2 \cdots m_\omega$ ist, so kann man die ganze Kreisperipherie vermöge ω Gleichungen der Grade m_1, m_2, m_3, $\ldots m_\omega$ in $2n+1$ gleiche Theile theilen. Wenn die Zahlen

$m_1, m_2, \ldots m_\omega$ unter einander relativ prim sind, so werden die Coefficienten dieser Gleichungen rationale Zahlen.

Ist $n = 2^\omega$, so hat man das bekannte Theorem über die regulären Polygone, welche geometrisch construirt werden können.

Vermöge des Theorems V sieht man, um den ganzen Umfang des Kreises in $2n+1$ gleiche Theile zu theilen, genügt es:

1) den ganzen Umfang des Kreises in $2n$ gleiche Theile zu theilen;
2) einen Bogen, den man dann construiren kann, in $2n$ gleiche Theile zu theilen;
3) aus einer einzigen Grösse ϱ die Quadratwurzel auszuziehen.

Herr *Gauss*[17]) hat dieses Theorem in seinen Disquis. ausgesprochen und er fügt hinzu, dass die Grösse, aus der man die Wurzel ausziehen muss, gleich $2n+1$ ist. Dies kann man auf die folgende Art leicht beweisen:

Wie man gesehen hat [(40), (38), (46)] ist ϱ der numerische Werth der Grösse:

$$(x + \alpha\Theta x + \alpha^2\Theta^2 x + \cdots + \alpha^{n-1}\Theta^{n-1}x)$$
$$\times(x + \alpha^{n-1}\Theta x + \alpha^{n-2}\Theta^2 x + \cdots + \alpha\Theta^{n-1}x),$$

wobei $\alpha = \cos\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n}$ ist. Setzt man für x, $\Theta x, \ldots$ ihre Werthe $\cos a$, $\cos ma$, $\cos m^2 a, \ldots$, so hat man:

$$\pm\varrho = \{\cos a + \alpha\cos ma + \alpha^2\cos m^2 a + \cdots + \alpha^{n-1}\cdot\cos m^{n-1}a\}\cdot$$
$$\times\{\cos a + \alpha^{n-1}\cos ma + \alpha^{n-2}\cos m^2 a + \cdots + \alpha\cos m^{n-1}a\}.$$

Entwickelt man und setzt $\pm\varrho$ in die Form:

$$\pm\varrho = t_0 + t_1\cdot\alpha + t_2\alpha^2 + \cdots + t_{n-1}\alpha^{n-1},$$

so findet man leicht:

$$t_\mu = \cos a\cdot\cos m^\mu a + \cos ma\cdot\cos m^{\mu+1}a + \cdots$$
$$+ \cos m^{n-1-\mu}a\cdot\cos m^{n-1}a + \cos m^{n-\mu}a\cdot\cos a +$$
$$+ \cos m^{n-\mu+1}a\cdot\cos ma + \cdots + \cos m^{n-1}a\cdot\cos m^{\mu-1}a.$$

Jetzt hat man:

$$\cos m^\nu a\cdot\cos m^{\mu+\nu}a = \tfrac{1}{2}\cos(m^{\mu+\nu}a + m^\nu a) + \tfrac{1}{2}\cdot\cos(m^{\mu+\nu}a - m^\nu a),$$

daher wird:

$$t_\mu = \tfrac{1}{2}\{\cos(m^\mu + 1)a + \cos(m^\mu + 1)ma + \cos(m^\mu + 1)m^2a + \cdots + \cos(m^\mu + 1)m^{n-1}a\} +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\{\cos(m^\mu - 1)a + \cos(m^\mu - 1)ma + \cos(m^\mu - 1)m^2a + \cdots + \cos(m^\mu - 1)m^{n-1}a\}.$$

[156] Setzt man: $(m^\mu + 1)a = a'$, $(m^\mu - 1)a = a''$, so hat man:

$$t_\mu = \tfrac{1}{2}\{\cos a' + \Theta(\cos a') + \Theta^2(\cos a') + \cdots + \Theta^{n-1}(\cos a')\} +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\{\cos a'' + \Theta(\cos a'') + \Theta^2(\cos a'') + \cdots + \Theta^{n-1}(\cos a'')\}.$$

Dies vorausgesetzt, sind zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich ob μ von Null verschieden ist oder nicht.

Im ersten Falle ist es klar, dass $\cos a'$ und $\cos a''$ Wurzeln der Gleichung (73) sind, daher ist $\cos a' = \Theta^\delta x$, $\cos a'' = \Theta^\varepsilon x$. Setzt man dies ein und beachtet, dass $\Theta^n x = x$ ist, so ergiebt sich:

$$t_\mu = \tfrac{1}{2}\{\Theta^\delta x + \Theta^{\delta+1}x + \cdots + \Theta^{n-1}x + x + \Theta x + \cdots + \Theta^{\delta-1}x\} +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\{\Theta^\varepsilon x + \Theta^{\varepsilon+1}x + \cdots + \Theta^{n-1}x + x + \Theta x + \cdots + \Theta^{\varepsilon-1}x\};$$

daher ist:

$$t_\mu = x + \Theta x + \Theta^2 x + \cdots + \Theta^{n-1}x,$$

d. h. t_μ ist gleich der Summe der Wurzeln; in Folge der Gleichung (73) ist also:

$$t_\mu = -\tfrac{1}{2}.$$

In dem Falle, wo $\mu = 0$ ist, wird der Werth von t_μ:

$$t_0 = \tfrac{1}{2}\{\cos 2a + \cos 2ma + \cdots + \cos 2m^{n-1}a\} + \tfrac{1}{2}n;$$

nun ist $\cos 2a$ eine Wurzel der Gleichung (73), setzt man daher:

$$\cos 2a = \Theta^\delta x,$$

so hat man:

$$\cos 2a + \cos 2ma + \cdots + \cos 2m^{n-1}a =$$
$$= \Theta^\delta x + \Theta^{\delta+1}x + \cdots + \Theta^{n-1}x + x + \Theta x + \cdots + \Theta^{\delta-1}x = -\tfrac{1}{2},$$

folglich ist:

$$t_0 = \tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{4}.$$

In Folge dieser Werthe von t_0 und t_μ wird der Werth von $\pm\varrho$:

$$\pm\varrho = \tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\{\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots + \alpha^{n-1}\},$$

es ist aber:

$$\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots + \alpha^{n-1} = -1,$$

daher wird:

$$\pm\varrho = \tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{4}.$$

Da ϱ wesentlich positiv ist, so ist:

$$\varrho = \frac{2n+1}{4}.$$

Dieser Werth von ϱ ergiebt:

$$\sqrt{\varrho} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2n+1};$$

daher ist, wie es Herr *Gauss* behauptet, die Wurzel, welche auszuziehen ist, diejenige der Zahl $2n + 1$.

Christiania, den 29. März 1828.

Anmerkungen.

Wie bei fast jeder mathematischen Disciplin lassen sich auch in der Entwickelung der Algebra zwei Perioden unterscheiden: eine naive und eine kritische. Als das Jahr, in welchem die Algebra von der ungebundenen Productionsweise, die mehr auf Erweiterung als auf feste Sicherung des Besitzes bedacht ist und in der statt strenger, scharfer Beweise auch bisweilen das Hypothetische, welches dem Autor selbst oft nicht klar zum Bewusstsein kommt, eine Rolle spielt, in ein reiferes Stadium übertrat, kann wohl mit Recht das Jahr 1799, in welchem die Dissertation von *C. F. Gauss* (1777—1855) erschien, angesehen werden. Die *Gauss*'sche Arbeit (abgedruckt in Heft 14 der Klassiker) stellt die Algebra zuerst auf sichere und einwandsfreie Grundlage, indem sie einen strengen und exacten Beweis für den Fundamentalsatz, dass jede algebraische Gleichung wenigstens eine Wurzel besitzt, liefert. A. a. O. im § 9 (p. 20 der Ausgabe der Klassiker) stellt *Gauss* auch bereits anlässlich der kritischen Besprechung der Beweise seiner Vorgänger die Auflösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades als ungemein unwahrscheinlich hin. Unter Auflösung versteht *Gauss* hierbei eine algebraische, d. h. eine Darstellung der Wurzeln der vorgelegten Gleichung durch eine endliche Anzahl von Wurzelzeichen oder Radicalen, also eine Zurückführung der vorgelegten Gleichung auf reine Gleichungen ($x^n = a$). Der erste einwandsfreie Beweis für die Thatsache, dass *Gauss* mit seiner Behauptung recht hatte, wurde von *N. H. Abel* (1802—1829) in seiner 1826 erschienenen Arbeit: »Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré« erbracht (1. Band des *Crelle*'schen Journals f. d. r. und ang. Math. = Oeuvres*), p. 66). Vorher hatte sich schon *Paolo Ruffini*

---

*) Unter den Oeuvres von *Abel* sollen im Folgenden die Oeuvres complètes de *Niels Henrik Abel*, nouvelle édition publiée par *L. Sylow* et *S. Lie* (1881) verstanden werden.

(1765—1822) mit dieser Frage beschäftigt. (Ueber die *Ruffini*schen Aufsätze siehe die Arbeit von *H. Burkhardt.* »Die Anfänge der Gruppentheorie und *Paolo Ruffini*« in den Supplementen zu *Schlömilch*'s Zeitschrift für Math. u. Physik, Jahrgang 1892, vgl. auch in *Abel*'s Oeuvres die Anmerkung Bd. II, p. 293).

Während aber die allgemeine Gleichung von höherem als viertem Grade nicht algebraisch auflösbar ist, giebt es sehr wohl specielle Gleichungen höheren Grades, die algebraisch auflösbar sind. Schon *Vandermonde* (1735—1796) hatte in der Gleichung $x^{11} = 1$ eine solche kennen gelehrt (Mémoire sur la résolution des équations, erschienen in Histoire de l'académie des sciences, Paris 1771)*), und *Gauss* hat in Sectio 7 seiner Disquisitiones arithmeticae (erschienen in Leipzig 1801, wiederabgedruckt im ersten Bande der gesammelten Werke (1863)) diese Eigenschaft allgemein für die bei der Kreistheilung auftretenden Gleichungen, d. h. die Gleichungen, von denen die Bestimmung der n-ten Einheitswurzeln abhängt, nachgewiesen. Die vorliegende *Abel*'sche Abhandlung entdeckt den springenden Punkt für das von *Gauss* gefundene Resultat darin, dass zwischen den Wurzeln der Kreistheilungsgleichungen rationale Beziehungen bestehen, und lehrt uns hierdurch eine grosse Klasse algebraisch auflösbarer Gleichungen kennen. Die von *Abel* behandelte Klasse von Gleichungen ist später nach seinem Namen genannt worden, und zwar hat zuerst *Leopold Kronecker* (1823—1891) die in der Einleitung an erster Stelle charakterisirten sowie im § 3 behandelten auflösbaren Gleichungen (Theorem III) als *Abel*'sche Gleichungen bezeichnet. (*L. Kronecker*, Ueber die algebraisch auflösbaren Gleichungen, Berichte der Verhandlungen der Berliner Akademie, Jahrgang 1853, p. 368). In Anlehnung an *C. Jordan* (Traité des substitutions et des équations algébriques, Paris, 1870, p. 287) nennt man jetzt allgemein die umfassendere Klasse von Gleichungen, welche *Abel* an zweiter Stelle in der Einleitung definirt und im § 4 (siehe Theorem VIII) behandelt hat, *Abel*'sche Gleichungen. Diese jetzt übliche, zuletzt erwähnte Bezeichnungsweise findet sich auch in der *Kronecker*'schen Arbeit über *Abel*'sche Gleichungen (Monatsberichte der Berliner Akademie, Jahrgang 1877, p. 846). Am angeführten Orte hat

---

*) In deutscher Uebersetzung herausgegeben von *C. Itzigsohn* unter dem Titel »Abhandlungen aus der reinen Mathematik von *N. Vandermonde.*« Berlin 1888. In dieser Ausgabe findet man die Wurzeln der Gleichung $x^{11} = 1$ auf p. 63 (Artikel 35) angegeben.

Kronecker auch für die specielle Gattung *Abel'*scher Gleichungen, die er ursprünglich *Abel'*sche Gleichungen nannte, die Bezeichnung »einfache *Abel'*sche Gleichungen« eingeführt; diese Bezeichnung hat sich eingebürgert.

Während *Abel* durch Relationen zwischen den Gleichungswurzeln das Wesen der algebraischen Gleichungen zu durchdringen suchte, war es *Évariste Galois* (1811—1832) vergönnt, den Kernpunkt für die Behandlung algebraischer Gleichungen aufzufinden. *Galois* hat die wichtigste Frage für die Behandlung der Gleichungen in einer Gruppe von Vertauschungen zwischen den Gleichungswurzeln entdeckt; diese Gruppe, welche zu jeder speciellen Gleichung gehört, spiegelt die charakteristischen Merkmale der betreffenden Gleichung wieder. *Galois'* hauptsächlichste algebraische Arbeit ist erst lange nach seinem Tode 1846 von *Liouville* publicirt worden; die Oeuvres mathématiques de *Galois* sind mit einer Einleitung von *E. Picard* 1897 von der Société mathématique de France herausgegeben worden. Vom Standpunkte der *Galois'*schen Theorie sind die *Abel'*schen Gleichungen auf folgende Art zu charakterisiren: die *Galois'*sche Gruppe einer *Abel'*schen Gleichung besteht aus vertauschbaren Substitutionen. Benutzt man den Begriff der Irreductibilität, so gilt auch die Umkehrung, eine jede irreductibele Gleichung, deren *Galois'*sche Gruppe nur aus vertauschbaren Substitutionen besteht, ist eine *Abel'*sche. Lässt man die beschränkende Bestimmung der Irreductibilität fort, so gilt nur das Theorem, dass jeder irreductible Factor einer Gleichung mit commutativer *Galois'*scher Gruppe eine *Abel*sche Gleichung ist; die vorgelegte Gleichung selbst braucht keine *Abel'*sche zu sein, da sich nicht stets alle Wurzeln durch eine rational ausdrücken zu lassen brauchen. (Vgl. den schon citirten Traité von *Jordan*, p. 287 ff. *Jordan* bezeichnet übrigens weitergehend jede Gleichung mit commutativer *Galois'*scher Gruppe als *Abel'*sche).

Wie *Abel* »in allen Fragen gewohnt war, den höchsten Standpunkt einzunehmen«, so hat er auch in der vorliegenden Arbeit mit genialem Blick diejenige Gattung von Gleichungen, welche überhaupt für die algebraische Auflösung der Gleichungen die einfachste und fundamentalste ist, herausgefunden. Bedient man sich des Begriffes *Abel'*scher Gleichung, so kann das Kriterium für die algebraische Auflösbarkeit einer Gleichung auf folgende Weise ausgesprochen werden: Damit eine Gleichung durch Wurzelzeichen auflösbar sei, ist nothwendig und

hinreichend, dass ihre Auflösung auf die einer Kette irreductibeler *Abel*'scher Gleichungen vom Primzahlgrade reducirt werden kann. Diese Behandlungsweise verdankt man *C. Jordan.* (Traité, p. 386). *Galois* führte die algebraisch auflösbaren Gleichungen noch auf eine Kette reiner Gleichungen zurück. Um allerdings die bei der angegebenen Reduction auftretenden einfachen *Abel*'schen Gleichungen zu lösen, ist die Adjunction von Einheitswurzeln erforderlich. Die betrachtete Art der Rückführung der algebraisch auflösbaren Gleichungen auf irreductibele Gleichungen mit einfacher *Galois*'scher Gruppe *) ist auch der Erweiterung auf nicht auflösbare Gleichungen fähig und ordnet mithin die von einem höheren Standpunkte sehr specielle Frage nach der algebraischen Auflösbarkeit einem allgemeineren Probleme, nämlich der Reduction irgend einer Gleichung auf eine Kette irreductibeler Gleichungen mit einfacher *Galois*'scher Gruppe, unter. (Vgl. hierzu die Darstellung von *O. Hölder*, Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen, Math. Annalen Bd. 34).

Während der hier vorliegende Aufsatz *Abel*'s wie die bisher besprochenen Ergebnisse den zu Grunde gelegten Rationalitätsbereich nicht fixiren, sind die *Abel*'schen Untersuchungen von *Kronecker*, vorzüglich in den zwei schon citirten Aufsätzen, über das algebraische Gebiet hinaus fortgeführt worden; *Kronecker* beschäftigte sich mit dem Problem: für einen gegebenen Rationalitätsbereich alle *Abel*'schen Gleichungen zu bestimmen. Wählt man als Rationalitätsbereich denjenigen, in welchem nur die rationalen Zahlen als bekannt angesehen werden und den man den absoluten Rationalitätsbereich nennt, so fallen alle *Abel*'schen Gleichungen unter die Kreistheilungsgleichungen. Mit anderen Worten: Jede Wurzel einer im absoluten Rationalitätsbereiche *Abel*'schen Gleichung ist als rationale Function von Einheitswurzeln mit rationalen Coefficienten darstellbar. Ausführliche Beweise dieses von *Kronecker* nicht vollständig bewiesenen Satzes wurden von *H. Weber* in den Acta math. Bd. 8 (1886) und *D. Hilbert* in den Nachrichten der Gesell-

*) Die *Galois*'sche Gruppe einer irreductibelen einfachen *Abel*schen Gleichung besteht aus den Potenzen einer einzigen cyklischen Substitution. Eine Gleichung, deren *Galois*'sche Gruppe aus einer cyklischen Substitution und deren Potenzen besteht, wird auch *cyklisch* genannt. Die Begriffe cyklische und irreductibele einfache *Abel*'sche Gleichung decken sich.

schaft der Wissenschaften zu Göttingen (1896) veröffentlicht. Vgl. auch die Darstellung in *H. Weber*'s Lehrbuch der Algebra, Bd. 2, p. 762; 2. Auflage erschienen in Braunschweig 1899. Auf diesen fundamentalen Satz war *Kronecker* bei der Behandlung der an *Abel*'sche Untersuchungen*) anknüpfenden Aufgabe, eine nothwendige und hinreichende Form für alle Ausdrücke, die Wurzeln *Abel*'scher Gleichungen sein können, anzugeben, geführt worden.

Der Nachweis für die Richtigkeit des Satzes, welchen *Kronecker* seinen liebsten Jugendtraum nannte, »dass die *Abel*'schen Gleichungen mit Quadratwurzeln rationaler Zahlen durch die Transformationsgleichungen elliptischer Functionen mit singulären Moduln gerade so erschöpft werden, wie die ganzzahligen *Abel*'schen Gleichungen durch die Kreistheilungsgleichungen«, ist noch nicht erbracht. (Vgl. den Auszug eines Briefes von *L. Kronecker* an *R. Dedekind* vom 15. März 1880, veröffentlicht von *G. Frobenius* in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie 1895, p. 115; ferner Monatsber. der Berliner Akad. 1877, p. 851).

Einen kurzen Abriss über *Abel*'s Leben und Leistungen findet man in Nr. 71 der Klassiker; daher soll an dieser Stelle hierauf nicht eingegangen werden. — In Bezug auf die vorliegende *Abel*'sche Arbeit sei noch bemerkt, sie ist im 4. Bande des *Crelle*'schen Journals unter dem Titel »Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement« in französischer Sprache erschienen; der Uebersetzung wurde der *Crelle*'sche Text zu Grunde gelegt. Die in eckige Klammern beigesetzten Zahlen der Uebersetzung beziehen sich auf diese Originalausgabe. Die bei *Crelle* enthaltenen Druckfehler wurden beseitigt und eine Vergleichung mit dem Text der Oeuvres, nouv. éd. vorgenommen. In dieser Ausgabe ist die Arbeit in Bd. I, p. 478—507 als Nr. 25 abgedruckt.

---

1) *Zu S. 3.* Diese Fassung ist die der Oeuvres. Nach dem *Crelle*'schen Text lauten diese Zeilen: Die algebraischen Gleichungen sind zwar im allgemeinen nicht auflösbar; trotzdem giebt es für jeden Grad eine besondere Klasse, deren algebraische Auflösung möglich ist.

---

*) *Abel*, Oeuvres, Bd. II, p. 217, sowie p. 260.

2) *Zu S. 4 u. 33.* Die ganze positive Zahl α heisst nach *Euler* (Demonstrationes circa residua ex divisione potestatum per numeros primos resultantia, Comment. nov. Ac. Petrop. t. 18, Jahrgang 1773) eine primitive Wurzel für die Primzahl n, wenn keine niedrigere als die $n-1$-te Potenz von α der Einheit bezüglich des Modul n congruent ist. Für jede Primzahl n existiren $\varphi(n-1)$ primitive Wurzeln; $\varphi(n-1)$ bedeutet dabei diejenige zahlentheoretische Function, welche angiebt, wieviel Zahlen in der Reihe: $1, 2, 3, \ldots n-1$ enthalten sind, die zu n relativ prim sind. Wenn α eine primitive Wurzel für die Primzahl n ist, so sind die sich bei der Division durch n ergebenden Reste der Zahlen $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots \alpha^{n-2}$ sämmtlich verschieden und abgesehen von der Reihenfolge die Zahlen $1, 2, 3, \ldots n-1$. Vgl. *Gauss*, Disqu. arithm., Art. 55—57.

3) *Zu S. 4.* Welche Gleichungsklasse aus der Theorie der elliptischen Functionen *Abel* hiermit im Auge hatte, kann nicht mit Sicherheit gesagt werden. Auf einfache *Abel*'sche Gleichungen war *Abel* schon in seinen Recherches sur les fonctions elliptiques (2. Bd. des *Crelle*'schen Journals, 1827) gestossen. Er reducirt dort die im allgemeinen algebraisch nicht auflösbare Periodentheilungsgleichung auf eine im allgemeinen auch algebraisch nicht auflösbare Gleichung niedrigeren Grades und Gleichungen, die nach Auflösung dieser ersteren Gleichung einfache *Abel*'sche Gleichungen sind; die letzteren Gleichungen löst er auch dort schon nach derselben Methode wie in dem vorliegenden Aufsatze. (Man vgl. die Formeln (114), (115), (116) u. (117) in den Oeuvres I, p. 313 u. 314 mit den Formeln (34), (35) und (42) der vorliegenden Arbeit.) In der Fortsetzung der erwähnten Arbeit (Bd. 3 des *Crelle*'schen Journals, 1828) untersuchte er auch die Theilung einer besonderen elliptischen Function, einer sogenannten lemniscatischen Function, welche aus dem Integral $\int\limits_0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ entspringt. Bei dieser elliptischen Function mit singulärem Modul*) findet er die Periodentheilungsgleichung algebraisch auflösbar und gewinnt wiederum einfache *Abel*'sche Glei-

*) Die Bezeichnung elliptische Functionen mit singulärem Modul oder singuläre elliptische Function stammt von *Kronecker*. Elliptische Functionen, bei denen das Periodenverhältniss einer ganzzahligen algebraischen Gleichung zweiten Grades mit negativer Discriminante genügt, führen diesen Namen.

chungen. (Vgl. Formel (224), Oeuvres, Bd. I, p. 359). Aus diesen Untersuchungen ergiebt sich ihm auch der der Kreistheilung analoge wichtige geometrische Satz: Man kann den Umfang der Lemniscate mittels Cirkels und Lineals in m gleiche Theile theilen, wenn m eine Primzahl von der Form $2^n + 1$ oder gleich 2^n oder gleich einem Producte aus mehreren verschiedenen Zahlen dieser zwei Formen ist. (a. a. O. p. 361, 362). Dieses Resultat war übrigens *Gauss* schon bei Abfassung seiner Disqu. arithm. bekannt; dies ergiebt sich aus der im Artikel 335 bei der Kreistheilung gemachten, für die Geschichte der Theorie der elliptischen Functionen ungemein interessanten Bemerkung: Namque (principia theoriae) non solum ad functiones circulares, sed pari successu ad multas alias functiones transscendentes applicari possunt, e. g. ad eas, quae ab integrali $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ pendent.

4) *Zu S. 4.* Die geplanten Untersuchungen aus der Theorie der elliptischen Functionen sind nicht erschienen. Am Ende der Abhandlung findet sich bei *Crelle* die folgende Note: »Der Autor dieses Aufsatzes wird bei anderer Gelegenheit Anwendungen auf elliptische Functionen geben. (Die Redaction).« *Abel* hatte die Absicht, vorzüglich die Untersuchungen über elliptische Functionen mit singulärem Modul, die er in *Crelle*, Bd. 3 begonnen hatte, weiter fortzuführen. Dies geht einerseits aus den Recherches (Oeuvres Bd. I, p. 352), andererseits aus dem Entwurf zur Fortsetzung der vorliegenden Arbeit, der sich in *Abel*'s nachgelassenen Papieren vorgefunden hat und in den Oeuvres, Bd. 2, p. 310 ff. abgedruckt ist, hervor. Das weitgehendste bei der Theilung der singulären elliptischen Functionen in Frage kommende Resultat lautet: Die Periodentheilungsgleichung einer elliptischen Function mit singulärem Modul ist stets algebraisch auflösbar. (Vgl. hierzu *H. Weber*, Elliptische Functionen und algebraische Zahlen. Braunschweig 1891, p. 480 ff.) *Abel* beabsichtigte jedoch wohl nicht die Frage in ihrem ganzen Umfange zu behandeln. — In besonders engem Zusammenhange mit den *Abel*'schen Gleichungen stehen auch die Gleichungen, welchen die singulären Moduln oder Invarianten singulärer elliptischer Functionen genügen. Diese Gleichungen sind zwar im absoluten Rationalitätsbereiche keine *Abel*'schen Gleichungen, sie werden es aber durch Adjunction von Quadratwurzeln ganzer Zahlen. (Vgl. *Kronecker* in den Berliner Monatsberichten, Jahrg. 1857, p. 455, Jahrg. 1862,

p. 363 u. Jahrg. 1877, p. 851, sowie das soeben citirte Werk von *Weber*.) Mit den singulären Moduln hat sich *Abel* selbst auch schon beschäftigt. Mit vorausschauendem Blick sprach er aus, dass die singulären Moduln durch Wurzelzeichen ausdrückbar sind. (Vgl. die Bemerkungen von Herrn *Sylow* in *Abel*'s Oeuvres, Bd. 2, p. 316). Eine eingehende Behandlung der singulären elliptischen Gebilde ist auch von Herrn *F. Klein* in seinen autographischen Vorlesungen über Zahlentheorie (Göttingen, 1896) gegeben worden.

5) *Zu S. 4.* Der Begriff der Irreductibilität ist davon abhängig, welche Grössen man als bekannt, rational oder gegeben voraussetzt. Um ihn scharf zu fassen, hat *Kronecker* den übrigens auch schon *Abel* und *Galois* geläufigen Begriff des Rationalitätsbereiches eingeführt. (Vgl. vorzüglich: *Kronecker*, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. *Crelle*, Bd. 92.) Ein Grössensystem bildet einen Rationalitätsbereich, wenn es von der Vollständigkeit ist, dass die Addition, Subtraction, Multiplication und Division (mit Ausnahme der Division durch Null) irgend welcher Zahlen des Systems nur zu Zahlen desselben Systems führt. Der kleinste mögliche Rationalitätsbereich umfasst alle rationalen Zahlen. Eine Gleichung $\varphi(x) = 0$ mit Coefficienten aus einem Rationalitätsbereiche P heisst in Bezug auf diesen Bereich irreductibel, wenn die ganze rationale Function $\varphi(x)$, welche auf der linken Seite der Gleichung steht, nicht in Factoren, die ebenfalls nur Coefficienten aus diesem Bereich P haben, zerlegt werden kann. Genau dasselbe, was *Kronecker* einen Rationalitätsbereich nennt, bezeichnet *Dedekind* in den Supplementen zu *Dirichlet*'s Vorlesungen über Zahlentheorie (Braunschweig, 4. Auflage, 1894) als algebraischen Körper.

6) *Zu S. 13.* Dieses Resultat ist weitergehend allgemein für imprimitive Gleichungen gültig; eine irreductibele *Abel*sche nicht einfache Gleichung ($m > 1$) ist stets imprimitiv. (Ueber Imprimitivität sei auf die Darstellung in *H. Weber*'s Lehrbuch der Algebra, Braunschweig, 2. Auflage, 1898, Bd. I, § 151, 158, 165 verwiesen.)

7) *Zu S. 14.* Hat man irgend eine Gleichung n-ten Grades $\varphi(x) = 0$ mit den n Wurzeln $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, und ist α eine primitive n-te Einheitswurzel, so heisst: $x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \cdots + \alpha^{n-1} x_n$ *Lagrange*'sche Resolvente. (*Lagrange*, Réflexions sur la résolution algébrique des équations. Oeuvres, Vol. 3, p. 331.)

8) *Zu S. 15.* Es wurde der Text der Oeuvres gegenüber dem etwas abweichenden *Crelle*'schen zu Grunde gelegt.

9) *Zu S. 15.* Bei einer jeden algebraisch auflösbaren Gleichung kann man der Auflösung eine derartige Form geben, dass die sämmtlichen auftretenden Radicale rationale Functionen der Wurzeln der vorgelegten Gleichung und gewisser Einheitswurzeln sind. Auf das Auftreten der Einheitswurzeln hat *Abel*, bei dem sich dieser Satz (Oeuvres, Bd. 1, p. 75) zuerst findet, nicht aufmerksam gemacht; dies geschah erst durch *Kronecker* (Berliner Monatsberichte, 1879, p. 206). Die durch (35) gegebene Lösung hat, wie die Formeln (33) zeigen, die dem *Abel-Kronecker*'schen Satz entsprechende Form.

10) *Zu S. 17.* Die Gleichung (42) wird illusorisch, wenn v_1 Null ist. In diesem Falle kann man auf folgende Art verfahren: Es sei μ in $m_1 \cdot m_2 \cdots m_\omega = m_1 \cdot n_1 = m_2 \cdot n_2 = \cdots = m_\omega \cdot n_\omega$, wobei m_1, m_2, ... m_ω die Potenzen der verschiedenen in μ enthaltenen Primzahlen sind, zerlegt. Man kann dann eine zu m_1 relativ prime Zahl a_1 finden, dass $\sqrt[\mu]{v_{a_1}}$ von Null verschieden ist; aus (34), (35) und (36) folgt nämlich, wenn $\frac{n_1 m_1}{\varepsilon_1} = q_1$ zur Abkürzung gesetzt wird und m_1 den Werth $\varepsilon_1^{\lambda_1}$ hat, wobei ε_1 eine Primzahl ist:

$$(\Theta^{q_1}x - x) = \frac{1}{\mu}\left[(\alpha^{-q_1} - 1)\sqrt[\mu]{v_1} + (\alpha^{-2q_1} - 1)\sqrt[\mu]{v_2} + \cdots \right.$$
$$\left. + (\alpha^{-(\mu-1)q_1} - 1)\sqrt[\mu]{v_{\mu-1}}\right].$$

Wenn k durch ε_1 theilbar ist, so wird $\alpha^{-kq_1} - 1 = 0$; wäre nun für jedes k, das nicht durch ε_1 theilbar ist, $\sqrt[\mu]{v_k} = 0$, so wäre gegen die Voraussetzung $\Theta^{q_1}x = x$; mithin existirt eine zu $m_1 = \varepsilon^{\lambda_1}$ relativ prime Zahl a_1, dass $\sqrt[\mu]{v_{a_1}}$ von Null verschieden ist; ebenso giebt es eine zu m_2 relativ prime Zahl a_2, dass $\sqrt[\mu]{v_{a_2}}$ von Null verschieden ist, u. s. w., schliesslich existirt eine analoge Zahl a_ω. Bildet man:

$$\sqrt[\mu]{v_k}\left(\sqrt[\mu]{v_{a_1}}\right)^{n_1 \nu_k}\left(\sqrt[\mu]{v_{a_2}}\right)^{n_2 \cdot \nu_k} \cdots \left(\sqrt[\mu]{v_{n_\omega}}\right)^{n_\omega \cdot \nu_k}$$

und bestimmt, was für jeden Werth des k möglich ist, ν_k aus der Congruenz:

$$k + \nu_k(n_1 a_1 + n_2 a_2 + \cdots + n_\omega a_\omega) \equiv 0 \pmod{\mu},$$

so ist der hingeschriebene Ausdruck als symmetrische Function der Gleichungswurzeln rational bekannt, er sei $= b_k$. Die Bestimmung von ν_k ist für jedes k möglich, denn $n_1 a_1 + n_2 a_2 + \cdots + n_\omega a_\omega$ ist relativ prim zu μ; es ist nämlich $a_1 \cdot n_1$ relativ prim zu m_1, während $n_2, n_3 \ldots n_\omega$ durch m_1 theilbar sind; mithin ist $n_1 a_1 + n_2 a_2 + \cdots + n_\omega a_\omega$ relativ prim zu m_1; u. s. w.; schliesslich ist $n_1 a_1 + n_2 a_2 + \cdots + n_\omega a_\omega$ relativ prim zu m_ω, mithin auch zu dem Producte $m_1 \cdot m_2 \cdots m_\omega = \mu$. Ferner ist:

$$\left(\sqrt[\mu]{v_{a_1}}\right)^{n_1} = \sqrt[m_1]{v_{a_1}}, \quad \left(\sqrt[\mu]{v_{a_2}}\right)^{n_2} = \sqrt[m_2]{v_{a_2}}, \ldots \left(\sqrt[\mu]{v_{a_\omega}}\right)^{n_\omega} = \sqrt[m_\omega]{v_{a_\omega}};$$

daher wird:

$$\sqrt[\mu]{v_k} = \frac{b_k}{\left(\sqrt[m_1]{v_{a_1}}\,\sqrt[m_2]{v_{a_2}}\ldots\sqrt[m_\omega]{v_{a_\omega}}\right)^{\nu_k}}.$$

x selbst erhält den Werth:

$$x = \frac{1}{\mu}\left\{-A + \frac{b_1}{\left(\sqrt[m_1]{v_{a_1}}\,\sqrt[m_2]{v_{a_2}}\ldots\sqrt[m_\omega]{v_{a_\omega}}\right)^{\nu_1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{b_2}{\left(\sqrt[m_1]{v_{a_1}}\,\sqrt[m_2]{v_{a_2}}\ldots\sqrt[m_\omega]{v_{a_\omega}}\right)^{\nu_2}} + \cdots + \frac{b_{\mu-1}}{\left(\sqrt[m_1]{v_{a_1}}\,\sqrt[m_2]{v_{a_2}}\ldots\sqrt[m_\omega]{v_{a_\omega}}\right)^{\nu_{\mu-1}}}\right\}.$$

Dieser Ausdruck hat nur $m_1 \cdot m_2 \cdots m_\omega = \mu$ Werthe. Bei dem Voraufgegangenen wurde die Darstellung von *H. Weber* in seiner Algebra, Bd. 1, p. 589 zu Grunde gelegt.

11) *Zu S. 17, 20 u. 33.* Die von *Abel* citirten Stellen der Disqu. arithm. sind die Artikel 359, 360 und 57. Wir bemerken dies, um eine raschere Orientirung in *Gauss*' gesammelten Werken zu ermöglichen.

12) *Zu S. 20.* In dem schon erwähnten Manuscripte macht *Abel* die Bemerkung: Wenn μ eine ungerade Zahl ist, so braucht man keine Quadratwurzel auszuziehen. Herr *Sylow* beweist dies in den Anmerkungen zu *Abel*'s Oeuvres, Bd. 2, p. 312 auf folgende Art:

Man hat:

$$\varrho = a$$

$$v_1 = c + d\sqrt{-1} = (\sqrt{a})^\mu \cdot (\cos\delta + \sqrt{-1}\sin\delta);$$

daher ist:

$$\sqrt{\varrho} = \frac{a^{\frac{\mu+1}{2}} \cos\delta}{c} = \frac{a^{\frac{\mu+1}{2}} \sin\delta}{d}.$$

13) *Zu S. 26.* Eine irreductible Gleichung, bei der alle Wurzeln rational durch eine ausdrückbar sind, heisst eine *Galois*'sche oder Normalgleichung. Bei einer Normalgleichung sind alle Wurzeln nicht nur durch eine bestimmte, sondern durch jede rational ausdrückbar. Das Fundament der *Galois*'schen Theorie besteht darin, dass sie jede beliebige Gleichung auf eine Normalgleichung reducirt. (*Galois*, Oeuvres math., p. 36, 37). Die Art der Reduction war bereits *Abel* bekannt. (Oeuvres, Bd. I, p. 547.)

14) *Zu S. 26.* *Kronecker* (Berliner Monatsberichte, Jahrg. 1877, p. 847) nennt diese allgemeinen *Abel*'schen Gleichungen im Gegensatze zu den einfachen mehrfaltige *Abel*'sche Gleichungen. In den Berliner Monatsberichten, Jahrg. 1882, p. 1062, will er sogar zu der von ihm früher verwandten Bezeichnungsweise zurückgehen und die einfachen *Abel*'schen Gleichungen wie ursprünglich *Abel*'sche Gleichungen, die allgemeinere Gattung ausdrücklich mehrfaltige *Abel*'sche Gleichungen nennen.

15) *Zu S. 30.* Wir wollen diesen Satz vom Standpunkte der *Galois*'schen Theorie noch beleuchten. Die Ordnung der *Galois*'schen Gruppe einer jeden irreductibelen Gleichung ist gleich dem Grade der Gleichung, also hier $= \varepsilon_1^{\nu_1} \cdot \varepsilon_2^{\nu_2} \cdots \varepsilon_\alpha^{\nu_\alpha}$. In jeder commutativen oder *Abel*'schen Gruppe $\mathfrak{G}$ der Ordnung $\varepsilon_1^{\nu_1} \cdot \varepsilon_2^{\nu_2} \cdots \varepsilon_\alpha^{\nu_\alpha}$ giebt es eine Untergruppe $\mathfrak{G}_1$ vom Grade $\varepsilon_1^{\nu_1}$, eine Untergruppe $\mathfrak{G}_2$ vom Grade $\varepsilon_2^{\nu_2}$, u. s. w., schliesslich eine Untergruppe $\mathfrak{G}_\alpha$ vom Grade $\varepsilon_\alpha^{\nu_\alpha}$; diese Gruppen haben ausser der Einheit kein Element gemeinsam, und man kann die ganze Gruppe als directes Product $\mathfrak{G}_1 \cdot \mathfrak{G}_2 \cdot \mathfrak{G}_3 \cdots \mathfrak{G}_\alpha$ dieser Untergruppen darstellen. Hieraus folgert man: Die Auflösung jeder irreductibelen *Abel*'schen Gleichung vom Grade $\varepsilon_1^{\nu_1} \cdot \varepsilon_2^{\nu_2} \cdots \varepsilon_\alpha^{\nu_\alpha}$ kann auf die Auflösung von α irreductibelen *Abel*'schen Gleichungen der Grade $\varepsilon_1^{\nu_1}, \varepsilon_2^{\nu_2}, \ldots \varepsilon_\alpha^{\nu_\alpha}$ zurückgeführt werden; diese α Gleichungen lassen sich wegen der Zerlegbarkeit der Gruppe nebeneinander auflösen. Nun enthält jede commutative Gruppe $\mathfrak{G}_1$ der Ordnung $\varepsilon_1^{\nu_1}$ eine commutative Untergruppe der Ordnung $\varepsilon_1^{\nu_1 - 1}$, diese eine commu-

tative Untergruppe der Ordnung $\varepsilon_1^{\nu_1-2}$, u. s. w. fort; daher kann die Auflösung einer irreductibelen *Abel*'schen Gleichung vom Grade $\varepsilon_1^{\nu_1}$ auf die Auflösung von ν_1 irreductiblen einfachen *Abel*'schen Gleichungen der Grade ε_1 reducirt werden; diese Gleichungen sind nach einander zu lösen. Hiermit hat man die von *Abel* ausgesprochenen Theoreme.

Will man noch tiefer in die Theorie der *Abel*'schen Gleichungen eindringen, so wird dies durch den folgenden Fundamentalsatz ermöglicht: In jeder commutativen endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ kann man stets ein System von erzeugenden Elementen $A_1, A_2, \ldots A_\sigma$ von den Ordnungen $n_1, n_2, \ldots n_\sigma$ derartig auswählen, dass das Product $n_1 \cdot n_2 \cdots n_\sigma$ gleich der Ordnung der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist und sich jedes Element von $\mathfrak{G}$ in der Form:

$$A_1^{h_1} \cdot A_2^{h_2} \cdot A_3^{h_3} \cdots A_\sigma^{h_\sigma}$$

ein- und auch nur einmal darstellen lässt, wenn h_1 alle Werthe $0, 1, 2, \ldots n_1 - 1$, h_2 alle Werthe $0, 1, 2, \ldots n_2 - 1, \ldots, h_\sigma$ alle Werthe $0, 1, 2, \ldots n_\sigma - 1$ annimmt. Ein System von Elementen, welches zu einer derartigen Darstellung geeignet ist, heisst eine Basis der Gruppe. Die erzeugenden Elemente der Basis können verschiedenartig gewählt werden; auch ist nicht für jede Basis die Anzahl der Elemente σ dieselbe. Man kann im besonderen bei jeder commutativen Gruppe die erzeugenden Elemente der Basis so wählen, dass ihre Ordnungen Primzahlpotenzen sind. Hieraus schliesst man: Die Auflösung jeder irreductiblen *Abel*'schen Gleichung vom Grade $\varepsilon_1^{\nu_1} \cdot \varepsilon_2^{\nu_2} \cdots \varepsilon_\alpha^{\nu_\alpha}$ kann auf die Auflösung einer Reihe nebeneinander zu lösender irreductibler einfacher *Abel*'scher Gleichungen, deren Grade Primzahlpotenzen sind, reducirt werden; die Anzahl der Gleichungen ist $\geqq \alpha$.

Fasst man bei der soeben besprochenen Darstellung einer commutativen Gruppe durch eine Basis, bei welcher die Ordnungen der erzeugenden Elemente Primzahlpotenzen sind, irgend welche erzeugende Elemente, deren Ordnungen unter einander relativ prim sind, zu einem zusammen, so bleiben die so entstehenden Elemente auch zur Constituirung einer Basis geeignet. Man kann daher die Basiselemente stets auch so wählen, dass die Ordnungszahl jedes voraufgehenden erzeugenden Elements entweder durch die Ordnungszahl des folgenden Basiselements theilbar oder ihr gleich wird. Auf diese Art gewinnt man die kleinste Anzahl von Basiselementen,

die kleinste Anzahl erzeugender Elemente für eine Basis heisst nach den Herren *Frobenius* und *Stickelberger* der Rang der commutativen Gruppe. Hieraus folgert man: Die Auflösung jeder irreductiblen *Abel*'schen Gleichung kann auf eine Kette nebeneinander zu lösender irreductibler einfacher *Abel*-scher Gleichungen reducirt werden, so dass der Grad einer jeden Gleichung dieser Kette theilbar durch den Grad der folgenden Gleichung oder ihm gleich wird, die Anzahl der Gleichungen ist gleich dem Range der Gruppe.

Mit dieser Darstellung jeder commutativen Gruppe $\mathfrak{G}$ durch eine Basis hängt es auch zusammen, dass die Wurzeln einer jeden irreductiblen *Abel*'schen Gleichung sich in das System:

$$\Theta_1^{h_1}\Theta_2^{h_2}\Theta_3^{h_3}\dots\Theta_\sigma^{h_\sigma}x$$

bringen lsssen, so dass in dieser Form jede Wurzel der Gleichung ein- und auch nur einmal erscheint, falls h_i alle Werthe $0, 1, 2, \dots n_i - 1 (i = 1, 2, 3 \dots \sigma)$ annimmt; die mit einander vertauschbaren Grössen $\Theta_i x (i = 1, 2, 3 \dots \sigma)$ bedeuten rationale Functionen von x, $\Theta_i^{h_i}x$ bedeutet, die Operation Θ_i soll h_i-mal wiederholt werden; n_i ist die kleinste Zahl, für die $\Theta_i^{n_i}x = x$ wird. Ebenso wie man die Gruppe $\mathfrak{G}$ verschiedenartig durch eine Basis darstellen kann, so trifft dies auch für die Repräsentation der Wurzeln in der obigen Form zu. Nennt man $n_1, n_2, \dots n_\sigma$ die Wiederholungszahlen, so kann man das folgende Theorem aussprechen: Jeder Basis, durch welche die commutative *Galois*'sche Gruppe $\mathfrak{G}$ unserer irreductiblen *Abel*'schen Gleichung dargestellt werden kann, entspricht eine Darstellung der Wurzeln in obiger Form, so dass die Wiederholungszahlen mit den Ordnungszahlen der Basiselemente übereinstimmen.

Wir geben noch die Litteratur über den Gegenstand:

Schering, die Fundamentalklassen der zusammensetzbaren arithmetischen Formen, Göttinger Abhandl., Bd. 14.

Kronecker, Monatsberichte der Berliner Akademie, Jahrg. 1870, p. 881 u. Jahrg. 1877, p. 847.

Frobenius u. *Stickelberger*, Ueber Gruppen vertauschbarer Elemente, *Crelle*'s Journ., Bd. 86, p. 217.

E. Netto, Substitutionentheorie und ihre Anwendungen auf Algebra, Leipzig, 1882, p. 206 ff.

H. Weber's Algebra, Bd. 2, p. 38—49 u. p. 762—765.

16) *Zu S. 31 u. 32.* In Bezug auf die Herleitung der Gleichungen (70) und (73) kann etwa auf *J. A. Serrets* Handbuch der höheren Algebra, deutsch von *G. Wertheim*, Leipzig, 2. Auflage, 1878, Bd. I, p. 195—198 verwiesen werden.

17) *Zu S. 34.* Herr *Sylow* macht darauf aufmerksam, dass bei *Gauss* in den Disqu. arithm. Artikel 360 der Ausdruck »sectio circuli« die Bestimmung der Grössen $\cos\frac{2k\pi}{2n+1}$ und $\sin\frac{2k\pi}{2n+1}$ bedeutet; bei *Abel* wird hingegen nur die erste der zwei Grössen untersucht.

Universität Freiburg i. B., im October 1899.

Alfred Loewy.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

